

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Санкт-Петербургская академия художеств имени Ильи Репина

Я. С. ВОРОЖИЦЕВ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПОСТРОЕНИЯ  
ПЕРСПЕКТИВНЫХ И ИНЫХ  
ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методические указания

Часть II

Санкт-Петербург  
2024

УДК 742.1

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургской академии художеств имени Ильи Репина.

**Состав редакционно-издательского совета:**

**Ю. Г. Бобров**, д-р искусствоведения, проф., акад. РАХ (председатель совета, главный редактор); **С. А. Елезова** (секретарь совета); **Н. Н. Акимова**, д-р филол. наук, доц.; **Е. В. Анисимов**, д-р ист. наук, проф.; **Н. Р. Ахмедова**, д-р искусствоведения, акад. АХ Узбекистана; **Е. К. Блинова**, д-р искусствоведения, проф.; **С. М. Грачева**, д-р искусствоведения, проф., чл.-кор. РАХ; **К. Г. Исупов**, д-р филос. наук, проф.; **А. А. Курпатова**, канд. искусствоведения, доц.; **Н. С. Кутейникова**, канд. искусствоведения, проф., акад. РАХ; **В. А. Ляняшин**, д-р искусствоведения, проф., вице-президент РАХ; **В. Г. Лисовский**, д-р искусствоведения, проф.; **Ю. А. Никитин**, д-р архитектуры, доц.; **В. С. Песиков**, народный художник РФ, проф., акад. РАХ; **О. А. Резницкая**, доц.; **Н. О. Смелков**, доц.; **Т. С. Усубалиев**, народный художник Кыргызской Республики, заслуженный деятель культуры Кыргызской Республики, **А. Н. Фёдоров**, канд. архитектуры, канд. богословия, д-р искусствоведения, проф.; **М. А. Чаркина**, канд. искусствоведения; **А. В. Чувин**, заслуженный художник РФ, проф., акад. РАХ.

Рецензент

**Д. В. Волошинов**,

доктор технических наук,

заведующий кафедрой информатики и компьютерного дизайна

Санкт-Петербургского государственного университета

телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

В оформлении обложки использован фрагмент картины Квентина Массейса «Меняла и его жена», 1514, Лувр

ISBN 978-5-903677-98-6 (общ.)  
ISBN 978-5-903677-97-9 (часть II)

© Автор, 2024

© Санкт-Петербургская академия художеств  
имени Ильи Репина, 2024

## ВВЕДЕНИЕ

Чтобы грамотно применять  
или нарушать геометрические  
законы формирования изображений,  
эти законы нужно знать.

Вторая часть методических указаний «Теория и практика построения перспективных и иных проекционных изображений» является логическим продолжением части первой [12]. Для изучения и понимания второй части указаний рекомендуется ознакомиться с общими положениями используемого в тексте понятийного и символического аппарата, которые изложены в части первой.

Во второй части рассматриваются вопросы, напрямую не связанные с материалом первой части, но нередко объединенные общей теорией и общими алгоритмами решений. Например, построение теней или отражений в плоском зеркале осуществляется методами, полностью аналогичными тем, что используются при построении аксонометрических и перспективных проекций.

Несколько более сложными выглядят алгоритмы построения преломленных и криволинейных отраженных изображений. Но и эти изображения в конечном итоге являются проекционными изображениями, формируемыми по законам распространения света.

Геометрия первой из всех наук сформировалась как наука в ее современном понимании. В то время как в иных науках господствовали религиозные, схоластические и прочие подобные тенденции, геометрия безоговорочно встала на путь эксперимента и формальной логики. Аксиомы евклидовой геометрии, принимаемые без доказательств, представляют собой не что иное, как простые и многократно проверенные экспериментальные данные. Эти эксперименты, а следовательно, и аксиомы можно назвать

органолептическими, так как для проведения этих экспериментов и обобщения результатов в виде аксиом достаточно имеющихся у нас органов чувств.

Со временем на путь эксперимента и логики встали и физика, и химия, и все другие науки. Таким образом, можно прийти к выводу, что математика ничуть не более точная наука, нежели любая другая, так как подобно всем иным наукам опирается на экспериментальные данные, принимаемые в качестве аксиом. Эти данные (аксиомы) не являются абсолютной априорной и незыблемой истиной, но справедливы лишь в некоторой области доступной нам реальности.

Развитие науки и техники позволило узнать, увидеть и почувствовать то, что прежде было недоступно нашему природному восприятию. Например, изображения в инфракрасном, ультрафиолетовом или рентгеновском излучении и многое, многое другое.

Зачастую научные исследования и наблюдения дают результаты, которые частично, а иногда и полностью противоречат так называемому здравому смыслу. Но дело в том, что здравый смысл не есть нечто врожденное и абсолютное, он формируется на основании знаний, как полученных из непосредственного личного опыта, так и усвоенных в результате обучения. Давно установлено, что непосредственно воспринимаемая нами реальность составляет лишь бесконечно малую часть от реальности существующей.

Вполне возможно, что на смену органолептической аксиоматике, основанной на естественных ощущениях и представлениях, со временем придет (и уже приходит) аксиоматика технологическая, которая будет опираться на данные, полученные в результате высокотехнологичных экспериментов.

Знания и представления современного художника должны быть шире и глубже, чем у его предшественников, и соответствовать современности. Шедевры, созданные великими мастерами прошлого, останутся таковыми на все времена, но прежние достижения никоим образом не являются

окончательными и не закрывают дорогу к дальнейшему поиску, развитию и совершенствованию.

По этой причине в указаниях рассмотрен ряд вопросов, которые недостаточно или совсем не освещены в имеющейся учебной литературе.

Изложенное далее никоим образом не претендует на полноту и завершенность, а, скорее, призвано несколько расширить кругозор, вызвать интерес и побудить к самостоятельному поиску новых методов и стилей художественного выражения.

# I. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЕЙ

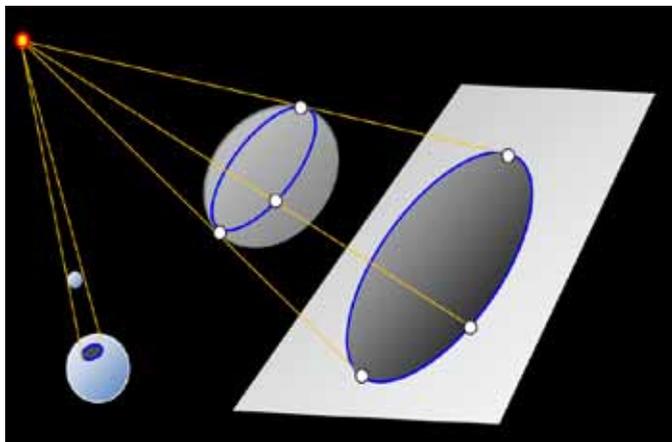
Линейная геометрическая теория построения теней рассматривает световые лучи как прямые, исходящие из одной точки (пучок или связка прямых). Эта теория не учитывает многие реальные световые эффекты. Например, такие как рассеивание, поглощение, разложение и т. д. По этой причине геометрические построения теней следует рассматривать как метод, дающий только самое первое приближение к реальности. Иначе говоря, геометрическая теория позволяет создать некую упрощенную первоначальную схему, которую можно дополнять и совершенствовать.

Тень, так же как и перспектива, является линейным проекционным изображением. Центром проецирования служит источник освещения, а картиной – поверхность, на которую падает (проецируется) тень. Особенностью теневой проекции является лишь то, что на картинную поверхность проецируется только контур объекта, образованный прямыми (лучами), касательными к поверхности объекта.

Дополнительной трудностью в построении теней является то, что если в перспективе в качестве картины выбирается плоскость или иная простая поверхность, то поверхность, на которую падает тень, может быть и зачастую бывает сколь угодно сложной.

Множество касательных из источника освещения к освещенному объекту образует так называемый световой конус. Множество точек касания проецирующих прямых образуют на поверхности

объекта границу между освещенной и неосвещенной частями поверхности. Эту границу принято называть контуром собственной тени. Неосвещенная часть поверхности называется собственной тенью объекта, а тень на картинной поверхности (пересечение светового конуса с картиной) – падающей тенью.

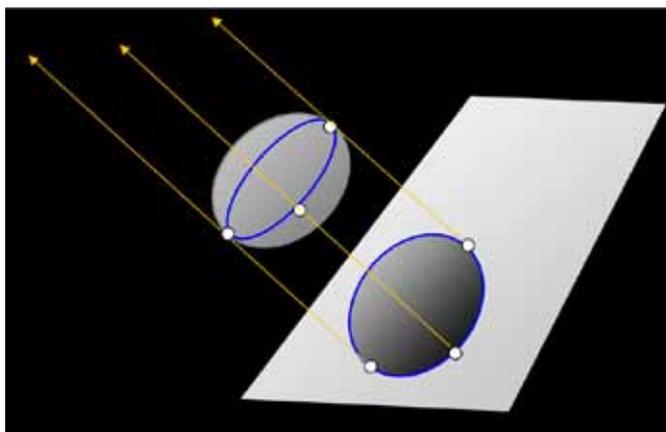


Ил. 1.1

На *ил. 1.1* представлена схема, иллюстрирующая вышеизложенное. Границы (контуры) собственной и падающей теней показаны синей линией. Контур падающей тени есть не что иное, как проекция контура собственной тени на картинную поверхность из источника света.

В зависимости от отношения расстояния между объектом и источником света к размерам освещаемого объекта принято различать центральное и параллельное освещение. В первом случае источник находится на расстоянии, соизмеримом с размерами объекта, и касательные лучи образуют расходящийся пучок (*ил. 1.1*). Во втором случае это расстояние неизмеримо больше размеров объекта, и лучи можно считать практически параллельными (*ил. 1.2*).

В земных масштабах первый случай имеет место при искусственном освещении, а второй – при естественном (солнце, луна).



Ил. 1.2

Следовательно, общий принцип построения тени от точечного источника света сводится к построению множества касательных к освещенному объекту из центра проецирования (источник света) и нахождению точек пересечения этих касательных с картинной поверхностью.

Сказанным полностью исчерпывается вся теоретическая сущность построения теней. Многочисленные исследования, рекомендации и учебники, посвященные построению теней, рассматривают лишь бесчисленные частные случаи таких построений.

В настоящее время может показаться, что достаточно знания вышеизложенного общего принципа построения теней, так как существующие компьютерные программы позволяют строить тени любой сложности.

Тем не менее, как показывает практика, художнику необходимы некоторые фундаментальные познания о формировании и построении теней.

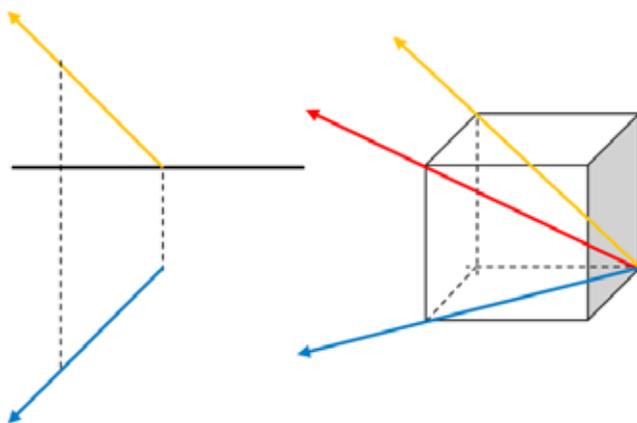
Полезными могут оказаться и знания о построении теней для наиболее распространенных геометрических форм в зависимости от расположения источника освещения.

Все это позволит предвидеть и использовать светотеневые эффекты в художественном произведении.

## 1.1. Тени в ортогональных проекциях

Ортогональные проекции непосредственно в художественной практике применяются довольно редко. Чаще их используют как вспомогательный инструмент на первоначальных стадиях работы.

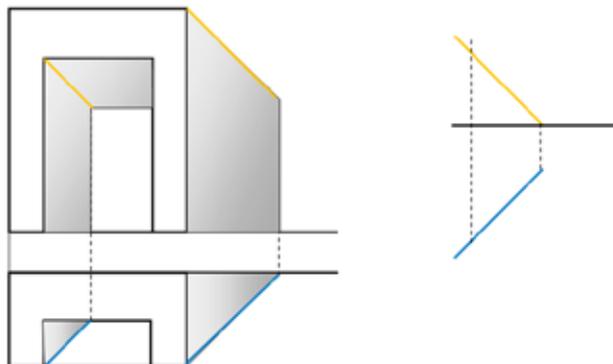
Традиционно при построении теней в ортогональных проекциях используют бесконечно удаленный источник света в направлении большой диагонали куба. На *ил. 1.1.1* в аксонометрии это направление показано красной прямой. Такой выбор источника освещения удобен тем, что на фронтальной и горизонтальной плоскостях проекции световых лучей взаимно перпендикулярны и составляют с горизонталью угол в  $45^\circ$ . На *ил. 1.1.1* фронтальная проекция показана желтым, а горизонтальная – синим.



Ил. 1.1.1

Такое направление на источник освещения принято считать стандартным, и в большинстве учебников рассматриваются многочисленные алгоритмы построения теней именно для такого расположения источника освещения. Но стоит изменить направление на источник света, как большая часть этих алгоритмов перестает работать. Следовательно, в настоящее время нет смысла изучать все эти бесчисленные частности, а достаточно знания общих фундаментальных принципов.

На *ил. 1.1.2* представлен пример построения тени в ортогональных проекциях от прямоугольной ниши при стандартном освещении.

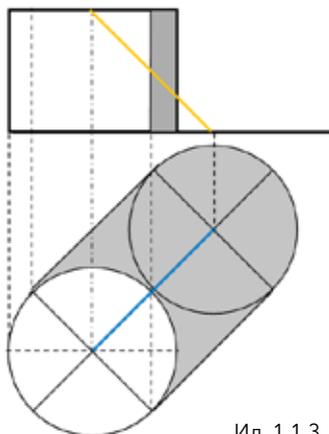


Ил. 1.1.2

Задача сводится к нахождению точек пересечения световых лучей с вертикальными плоскостями.

#### Цилиндрическая поверхность

На *ил. 1.1.3* показано построение собственной и падающей теней прямого кругового цилиндра.

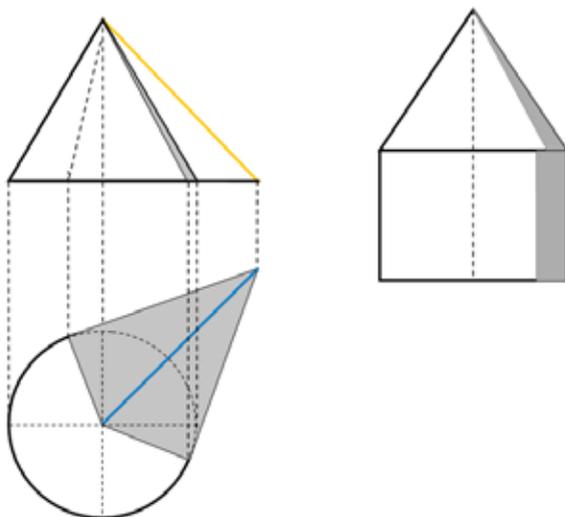


Ил. 1.1.3

В результате задача сводится к построению теневой проекции окружности верхней части цилиндра и двух касательных к этой проекции.

#### Коническая поверхность

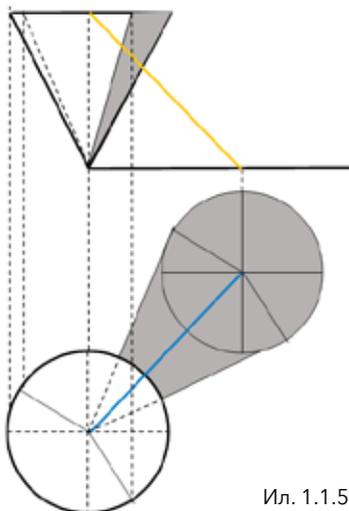
На *ил. 1.1.4* показано построение собственной и падающей теней прямого кругового конуса. Падающая тень построена на плоскость основания конуса.



Ил. 1.1.4

Задача сводится к построению теневой проекции вершины конуса и двух касательных к его основанию. На рисунке справа показана тень на цилиндре с коническим завершением. Следует обратить внимание, что контуры собственных теней конуса и цилиндра не совпадают на границе этих тел.

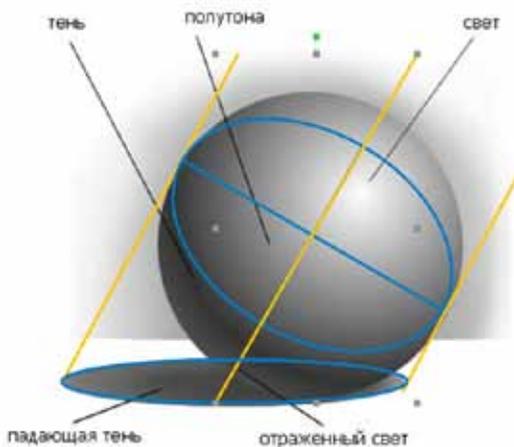
На *ил. 1.1.5* показано построение собственной и падающей теней прямого кругового конуса, расположенного вершиной вниз.



Ил. 1.1.5

Задача сводится к построению теневой проекции верхней направляющей конуса (горизонтальная окружность) и двух касательных к этой проекции из вершины конуса.

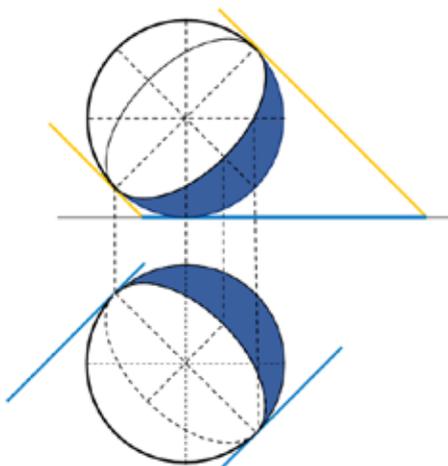
### Сферическая поверхность



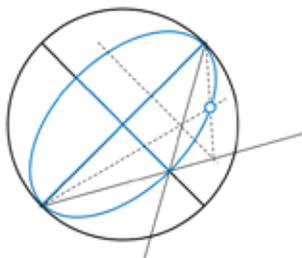
Ил. 1.1.6

На *ил. 1.1.6* представлена схема теней и теневых градаций на сферической поверхности. Если падающая тень представляет собой достаточно четко очерченный эллипс, то граница собственной тени весьма размыта и четкой линии на поверхности сферы (в отличие от теоретического построения) не образует. Указанное обстоятельство лишний раз подчеркивает, что геометрическая теория построения теней это всего лишь некоторая теория, приблизительно соответствующая реальности.

### Собственная тень сферы



Ил. 1.1.7



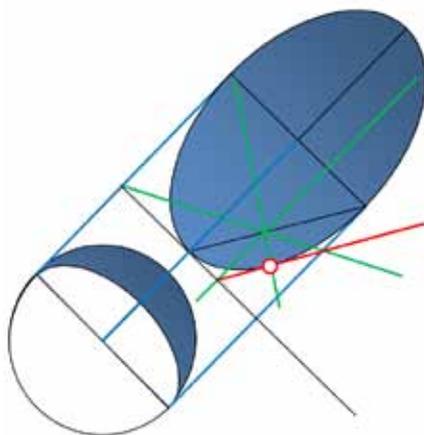
Ил. 1.1.8

На *ил. 1.1.7* представлена геометрическая схема построения собственной тени на сферической поверхности при стандартном положении источника освещения. Теоретически граница собственной тени на сфере представляет собой эллипс, но, как было указано выше, в реальности эта тень четкой линии на поверхности не образует.

Построение любого количества промежуточных точек собственной тени на сфере может быть осуществлено по алгоритму, показанному на *ил. 1.1.8*.

Падающая тень от сферической поверхности на плоскость представляет собой кривую второго порядка. И в зависимости от положения картинной плоскости относительно источника освещения может быть окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой.

На *ил. 1.1.9* представлена схема построения падающей тени от сферической поверхности на горизонтальную плоскость, параллельную горизонтальной оси сферы при стандартном положении источника освещения.

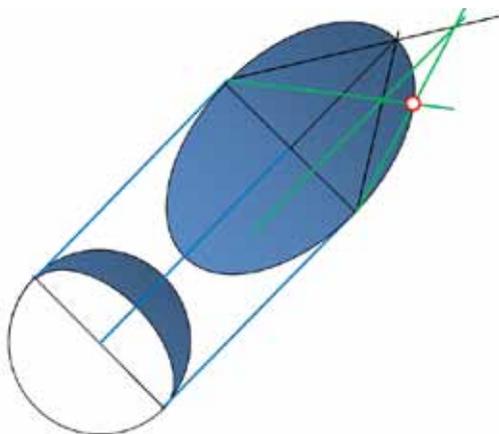


Ил. 1.1.9

В этом случае падающая тень от сферической поверхности на плоскость представляет собой эллипс, малая ось которого равна диаметру сферы, а большая ось может назначаться произвольно, от окружности до бесконечности, в зависимости от угла наклона картинной плоскости.

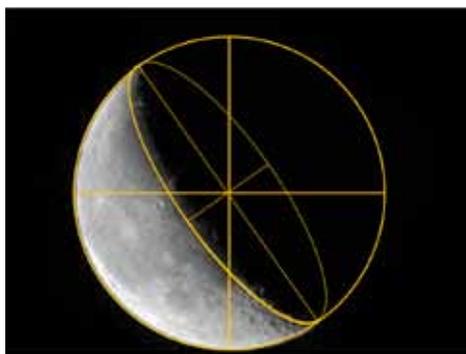
На рисунке показано построение произвольной касательной и точки касания коники (в данном случае эллипса) по универсальному алгоритму, пригодному для любой коники. Более подробно этот алгоритм рассмотрен в разделе 2.4 первой части методических указаний [12, с. 74–75].

На *ил. 1.1.10* показан иной способ построения произвольной точки теневого эллипса.

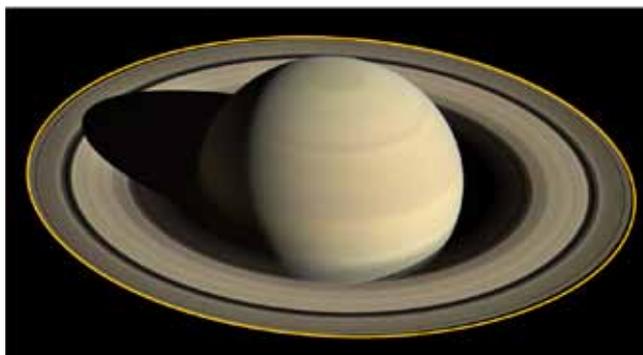


Ил. 1.1.10

Наиболее близким к ортогональной проекции природным теневым явлением, видимым невооруженным глазом, является смена фаз луны (*ил. 1.1.11*). Луна и Солнце находятся на расстояниях, несоизмеримых с земными мерками, и могут с достаточной практической точностью рассматриваться как бесконечно удаленные объекты.



Ил. 1.1.11



Ил. 1.1.12

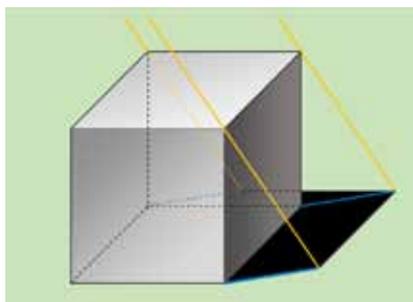
На *ил. 1.1.12* представлено еще более грандиозное теневое явление – тень планеты Сатурн, падающая на плоскость его колец. Диаметр Сатурна почти в 10 раз больше земного.

Построение теней в ортогональных проекциях из источника света, находящегося на конечном расстоянии, применяется крайне редко.

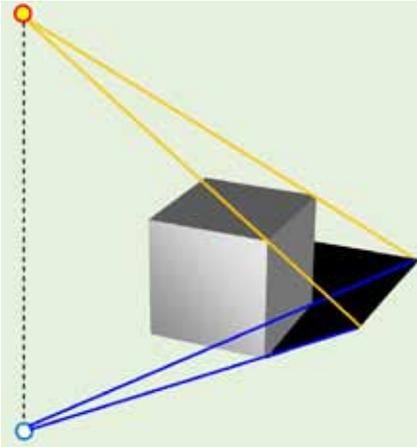
### 1.2. Тени в аксонометрии

Построение теней в аксонометрии теоретически ничем не отличается от построения теней в ортогональных проекциях, но обладает большей наглядностью.

На *ил. 1.2.1* показано построение тени куба на горизонтальную плоскость из бесконечно удаленного источника освещения.



Ил. 1.2.1



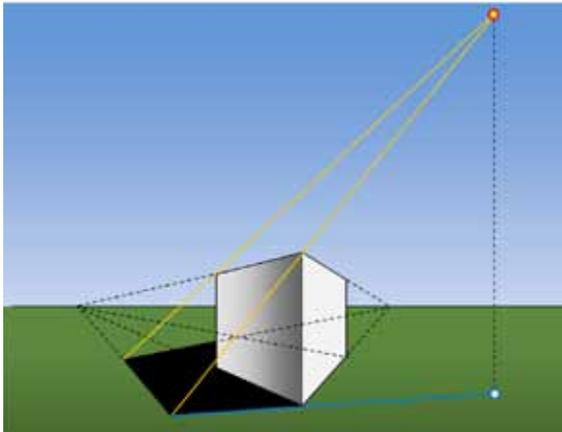
Ил. 1.2.2

На *ил. 1.2.2.* показано построение тени аксонометрической проекции куба на горизонтальную плоскость от источника света, расположенного на конечном расстоянии. Различие состоит лишь в том, что проекции световых лучей не параллельны, а представляют собой расходящиеся пучки.

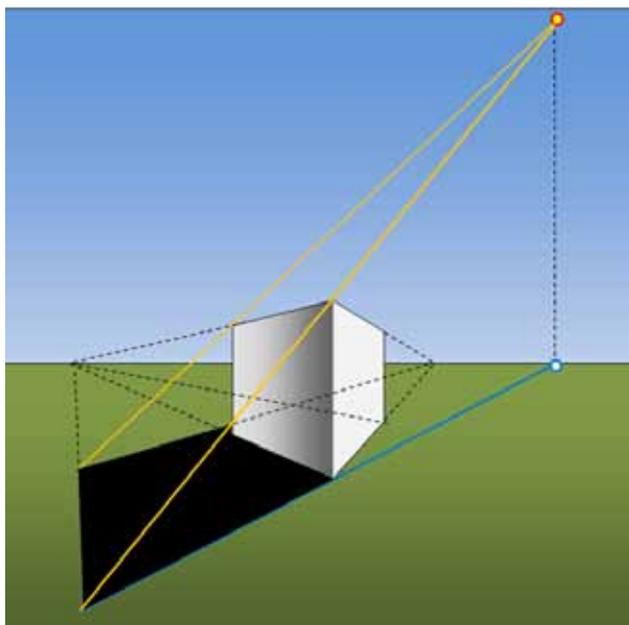
### 1.3. Тени в перспективе

Построение теней в перспективе принципиально (с точки зрения проективной геометрии) также ничем не отличается от построения теней в ортогональных проекциях или в аксонометрии.

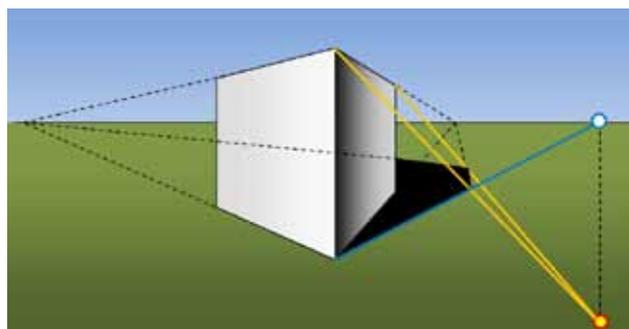
На *ил. 1.3.1* показано построение тени куба на горизонтальную плоскость от источника света, расположенного на конечном расстоянии.



Ил. 1.3.1



Ил. 1.3.2



Ил. 1.3.3

На *ил. 1.3.2* показано построение тени куба на горизонтальную плоскость, при этом источник освещения (например, солнце) находится в бесконечности перед зрителем. В этом случае первая проекция источника освещения расположена выше линии горизонта, а вторая находится на линии горизонта.

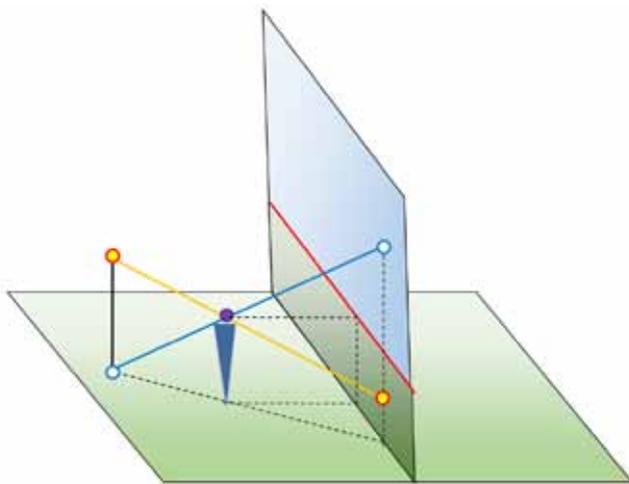
На *ил. 1.3.3* показано построение тени куба на горизонтальную плоскость. Источник освещения находится в бесконечности за спиной зрителя. В этом случае первая проекция источника освещения расположена ниже линии горизонта, а вторая находится на линии горизонта.

Привычно видеть и изображать на картине только то, что находится перед зрителем. Геометрическая модель с равным успехом позволяет спроецировать на картину и объекты, находящиеся за спиной зрителя. Это имеет смысл в том случае, когда на картине видны результаты воздействия такого объекта. Например, тень от источника света, находящегося за спиной зрителя.

Например, на *ил. 1.3.4* солнечный диск не виден, но видны тени от освещенных солнцем деревьев.



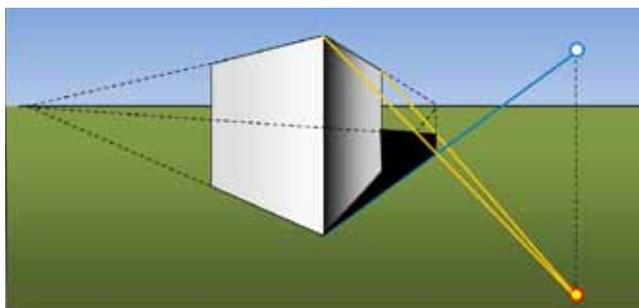
Ил. 1.3.4



Ил. 1.3.5

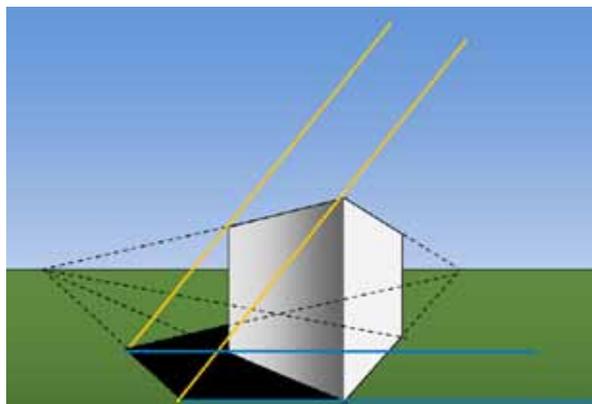
Схема на *ил. 1.3.5* объясняет, почему при нахождении источника света за спиной зрителя его проекции на картине занимают такое положение.

На схеме показан источник освещения, расположенный за спиной зрителя на конечном расстоянии.



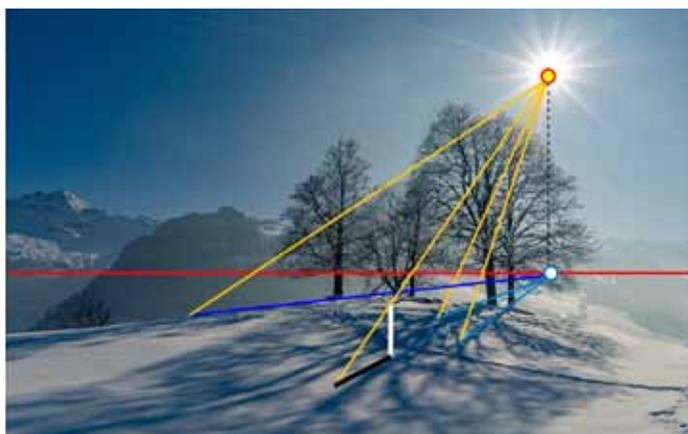
Ил. 1.3.6

На *ил. 1.3.6* показано построение тени от источника света, находящегося за спиной зрителя на конечном расстоянии.



Ил. 1.3.7

На *ил. 1.3.7* представлен частный случай, когда источник освещения находится в бесконечности, в так называемой нейтральной плоскости. Нейтральная плоскость – плоскость, проходящая через точку зрения параллельно картине. В этом случае первая проекция источника освещения находится в бесконечности, а вторая – на линии горизонта, также в бесконечности. Следствием этого является параллельность первых и вторых проекций световых лучей, что значительно упрощает построения.

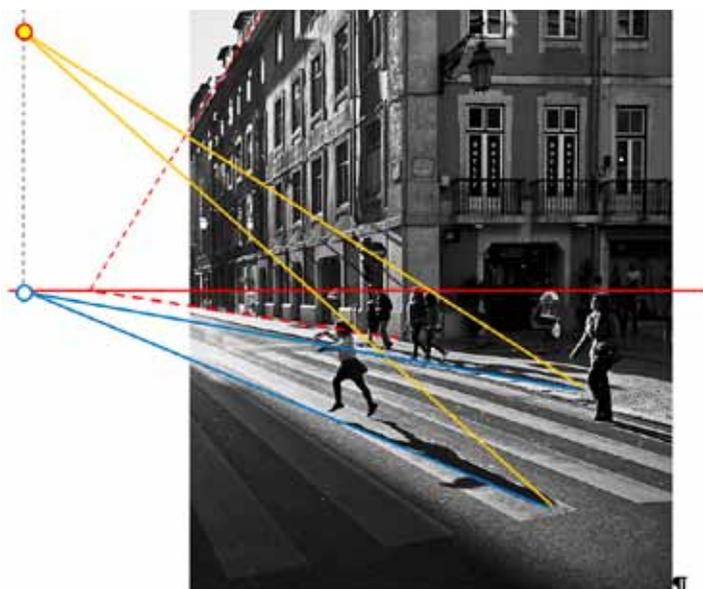


Ил. 1.3.8

На *ил. 1.3.8* представлен случай, когда источник освещения (солнце) находится перед зрителем и его проекция видна непосредственно на картине. По направлениям теней от стволов деревьев с достаточно высокой точностью могут быть найдены положение линии горизонта (красная) и проекция на горизонт солнечного диска (вторая проекция).

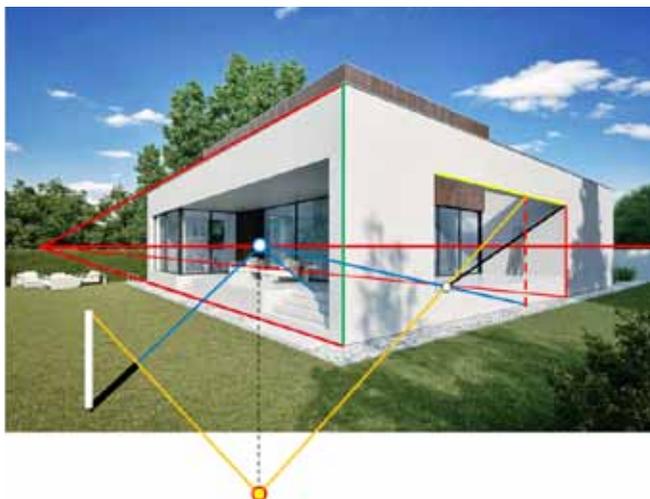
В качестве примера на фотографии построена тень от вертикального столбика (белый).

Чаще всего изображение солнца находится за пределами картины и на картине видны только тени.



Ил. 1.3.9

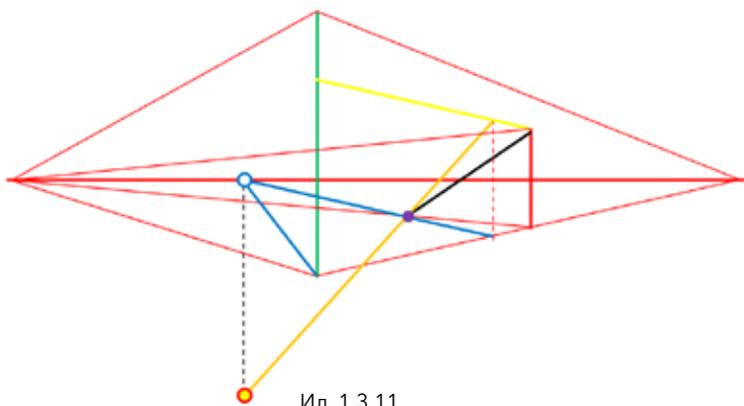
На *ил. 1.3.9* солнце находится перед зрителем, но за пределами рамки картины. На пересечении линий карниза и цоколя здания (красный пунктир) найдено положение линии горизонта. Тени от фигур людей позволяют найти положение первой и второй проекций солнечного диска.



Ил. 1.3.10

На *ил. 1.3.10* источник освещения находится за спиной зрителя и, следовательно, его первая проекция расположена ниже линии горизонта. В левой части фотографии построена тень от вертикального столбика (белый) на поверхность газона.

Построения, позволяющие найти проекции солнца на *ил. 1.3.10*, не столь очевидны, как в предыдущих примерах, и требуют пояснений (*см. ил. 1.3.11*).



Ил. 1.3.11

На пересечении горизонтальных прямых по фасадам находится линия горизонта.

Пересечение с горизонтом тени от вертикального ребра (зеленое) на горизонтальную плоскость дает вторую проекцию солнечного диска.

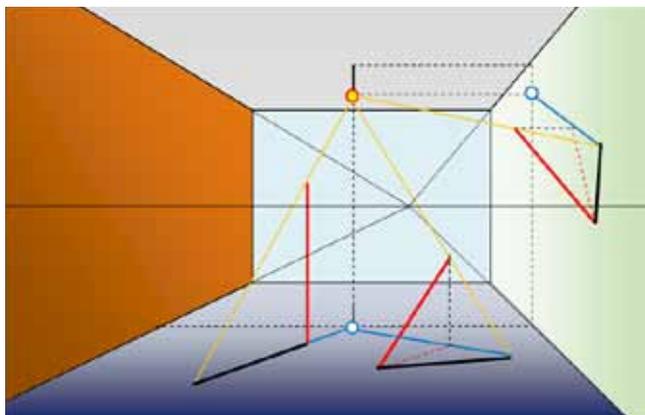
Тень на стене от горизонтального карниза (черная) позволяет найти точку пересечения этой тени с основанием стены (фиолетовая). Найденная точка определяет положение первой проекции солнечного диска.



Ил. 1.3.12

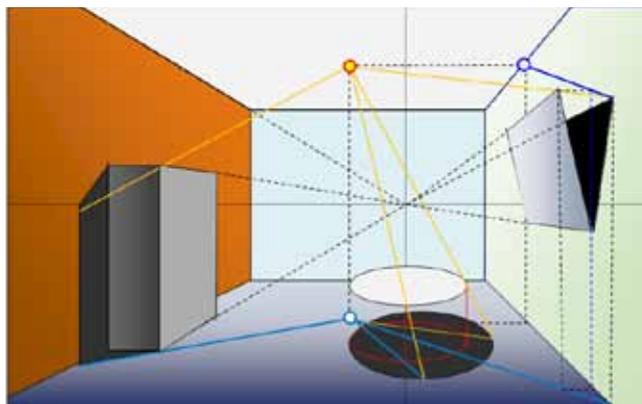
На *ил. 1.3.12* солнце находится в нейтральной плоскости и проекции световых лучей – параллельны.

Построение теней в интерьере принципиально ничем не отличается от построения теней в экстерьере. Различие состоит лишь в том, что в интерьере зачастую имеются изображения плоскостей стен и потолка, которые с равным успехом могут использоваться как предметные плоскости.



Ил. 1.3.13

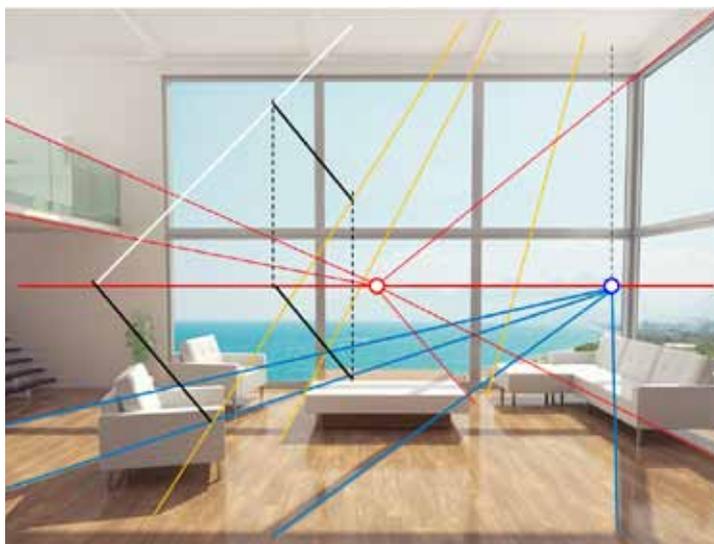
На *ил. 1.3.13* представлено построение теней от вертикального и двух наклонных отрезков. Непосредственно из рисунка видно, что алгоритмы построения теней на полу и на стене совершенно аналогичны. Более того, если повернуть рисунок на  $90^\circ$ , то стена займет место пола и аналогия станет абсолютной.



Ил. 1.3.14

На *ил. 1.3.14* представлено построение в интерьере простейших теней от мебели. В отличие от предыдущего рисунка источник

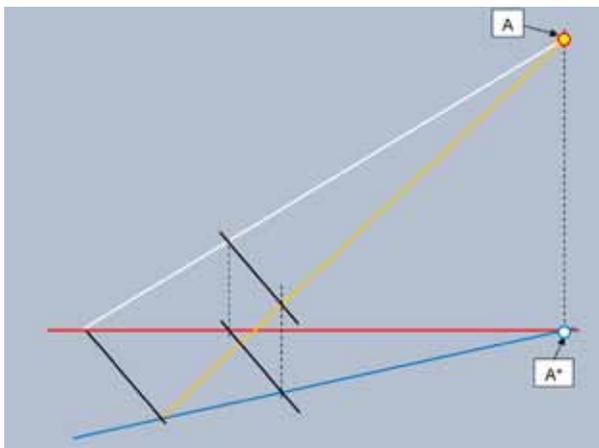
света расположен не на подвесе, а непосредственно в плоскости потолка. В остальном все построения совершенно аналогичны. Построение тени от наклонной плоскости (зеркало, картина и т. п.) продублировано относительно пола и стены. Оба построения дают один и тот же результат.



Ил. 1.3.15

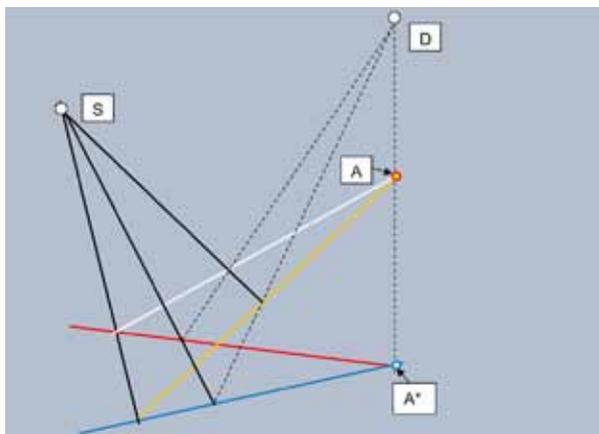
В интерьере на *ил. 1.3.15* солнце находится перед зрителем. Его первая проекция расположена на пересечении желтых прямых за пределами картины. Вторая проекция (синяя) – на линии горизонта. Следует обратить внимание, что геометрический горизонт (красный) заметно выше видимого на фотографии горизонта реального. Эта разница тем больше, чем выше расположена точка съемки, и происходит от шарообразности земли. Кроме того, данная фотография сделана с небольшим наклоном плоскости картины от зрителя (вертикали не параллельны), что еще более увеличивает расхождение.

Первая проекция солнечного диска находится за пределами картины. На фото показано построение произвольной прямой (белая) в недоступную точку схода.



Ил. 1.3.16

На *ил. 1.3.16* показана принципиальная схема построения прямой (белая) в недоступную точку схода  $A$ , если имеются три прямые (красная, синяя, желтая) и известно, что точки  $A$  и  $A^*$  лежат на вертикальной прямой.



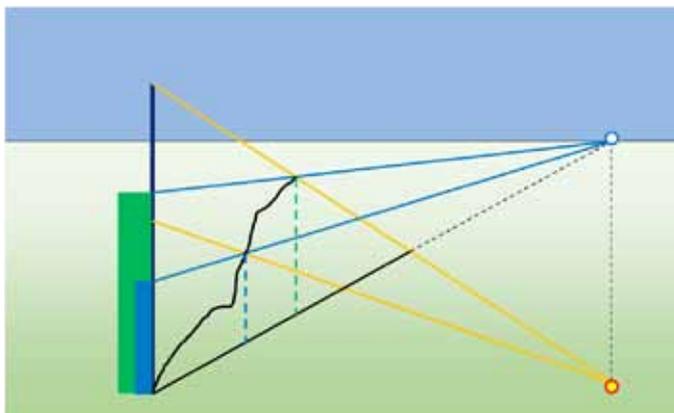
Ил. 1.3.17

На *ил. 1.3.17* показана общая принципиальная схема построения прямой (белая) в недоступную точку схода  $A$ , основанная на теореме

Дезарга. Построение на *ил. 1.3.16* можно рассматривать как частный случай, при котором точки  $S$  и  $D$  находятся в бесконечности.

#### 1.4. Тени на сложном рельефе

На *ил. 1.4.1* представлена тень от вертикального стержня на произвольном сложном рельефе. Если известны первая и вторая проекции источника освещения и имеется изображение тени от вертикального стержня или ребра, то можно установить соответствие между точками стержня и точками тени, а также определить высоту теневого точек по вертикали. Иначе говоря, установить отметки рельефа местности, на которую падает тень.



Ил. 1.4.1

Построение, представленное на рисунке, настолько очевидно, что не требует дополнительных пояснений. На рисунке показана тень на горизонтальной плоскости (прямая) и тень на сложном рельефе. Определены высоты верхней (зеленая) и произвольной промежуточной (синяя) теневого точек.

## II. ПОСТРОЕНИЕ ОТРАЖЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Все реальные предметы в большей или меньшей степени поглощают и отражают свет. Именно поэтому мы можем видеть предметы, которые сами не испускают излучения в видимой части спектра, но светятся отраженным светом. Цвет предметов также зависит от того, какая часть спектра падающего излучения поглощается, а какая отражается.

Отношение количеств падающего и отраженного света называют коэффициентом отражения. Чем он больше, тем ярче и светлее представляется рассматриваемый предмет.

Если отражающая поверхность имеет шероховатую структуру, то свет от такой поверхности отражается хаотично, и мы видим только сам предмет. Но если отражающая поверхность имеет гладкую (полированную) структуру, то отражение становится упорядоченным, и мы видим не только саму поверхность, но и окружающие предметы, отражающиеся в этой поверхности. Такое отражение называют зеркальным.

В природе явление зеркального отражения можно наблюдать на спокойной водной или ровной ледяной поверхности. Часто встречаются отражения от слоя теплого воздуха, образовавшегося над нагретой солнцем поверхностью (водные миражи). В быту и технике широко используются зеркала, как плоские, так и криволинейные. Многие бытовые предметы обладают криволинейной полированной поверхностью, на которой возникают подчас самые причудливые отражения.

Для правильного построения отраженных изображений или, напротив, для сознательного их искажения, художнику необходимо знать основные физические и геометрические законы, по которым эти изображения формируются.

Ниже приведены несколько фотографий, иллюстрирующих различные виды отражений.

На *ил. 2.1* представлено отражение на плоской поверхности спокойного водоема.



Ил. 2.1. Отражение на плоской поверхности

На *ил. 2.2* показано отражение на сферической поверхности. Следует отметить, что в данном случае съемка произведена телескопическим объективом с большого расстояния. Вследствие этого отражение фигуры в центре сферы (человека, производящего съемку) имеет очень малый размер и почти незаметно.

Так как на фотографии имеется несколько близко расположенных зеркальных сфер, то наблюдается эффект многократного отражения. Некоторые заметные недостатки отраженных изображений объясняются неточностью изготовления данных сферических поверхностей.



Ил. 2.2. Отражение на сферической поверхности



Ил. 2.3. Отражение на искривленной поверхности

Отражения на искривленной поверхности (ил. 2.3) имеют бесчисленное множество вариаций и могут принимать самые неожиданные и причудливые формы.



Ил. 2.4. Диффузное отражение

Диффузные отражения (ил. 2.4) являются переходными от зеркальных к незеркальным хаотическим отражениям.

### 2.1. Отражения в плоском зеркале

Отражение в плоской зеркальной поверхности создает отраженное изображение объекта, симметричное отражаемому относительно этой плоскости (зеркальная симметрия). При этом отражением прямой линии всегда будет также прямая. Следовательно, к отражениям в плоском зеркале применимы законы и алгоритмы линейной перспективы.

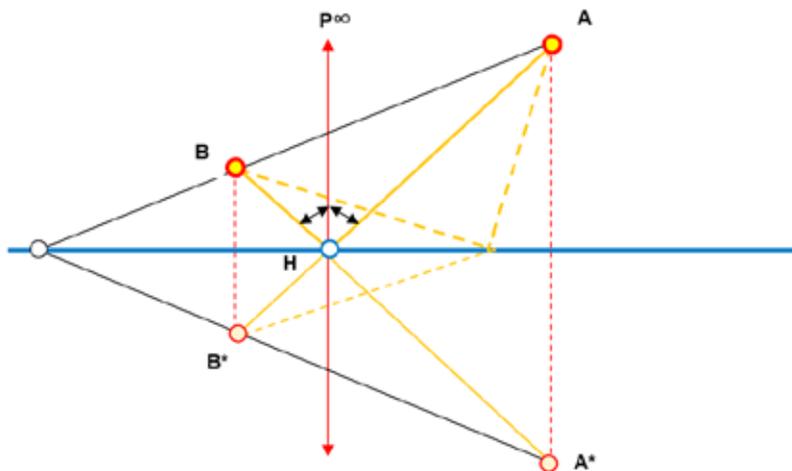
Отражения на криволинейных поверхностях могут иметь самый причудливый характер, но все отражения (как и преломления) подчиняются очень простому принципу минимального времени.

Согласно этому принципу, между двумя точками свет распространяется по пути, который может быть пройден за минимальное время.

В случае отражения свет распространяется в однородной среде с постоянной скоростью и путь, минимальный по времени, совпадает с кратчайшим путем. По этой причине закон отражения очень прост (угол падения равен углу отражения) и был установлен еще в античные времена. Интересно и поучительно, что закон преломления света, основанный на том же самом принципе минимального времени, был открыт на две тысячи лет позже.

Падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром к отражающей плоскости в точке падения. В случае криволинейной отражающей поверхности падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром к плоскости, касательной для данной поверхности в точке падения.

Углы, образованные падающим и отраженным лучами с перпендикуляром к отражающей плоскости, восстановленным из точки падения, равны.

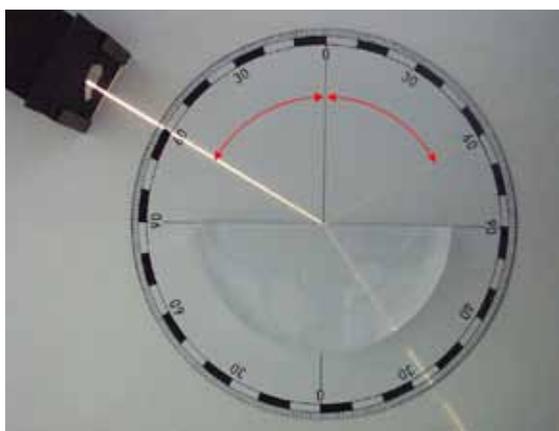


Ил. 2.1.1

На *ил. 2.1.1* показана графическая иллюстрация этого закона. Желтым цветом показаны падающий и отраженный лучи, соединяющие точки *A* и *B*. Если в одной из этих точек находится глаз наблюдателя, то ему будет казаться, что свет пришел по направлению

отраженного луча и рассматриваемая точка находится по другую сторону зеркала на том же расстоянии, что и реальная точка. Иначе говоря, имеет место так называемая зеркальная симметрия, в которой соответственные точки (реальная и отраженная) располагаются на прямой, перпендикулярной отражающей плоскости на равных расстояниях от этой плоскости.

Непосредственно из *ил. 2.1.1* видно, что любой другой путь отраженного луча между двумя данными точками (показан пунктиром) будет иметь большую протяженность и, следовательно, займет больше времени.



Ил. 2.1.2

На *ил. 2.1.2* представлена реальная картина отражения и преломления светового луча. Свет, падающий на поверхность прозрачного материала, частично отражается, а частично преломляется. Непосредственно по фотографии видно, что угол падения равен углу отражения (в данном примере эти углы равны  $60^\circ$ ). Отношение между углами падения и преломления несколько более сложно и будет рассмотрено далее.

Исходя из вышеизложенного, задача построения отражения точки трехмерного пространства в плоском зеркале сводится к следующим трем операциям:

- из данной точки построить перпендикуляр к плоскости зеркала;

- найти точку пересечения перпендикуляра с плоскостью зеркала;
- от найденной точки по другую сторону зеркала отложить на перпендикуляре отрезок, равный расстоянию от данной точки до плоскости зеркала.

Полученная точка будет являться зеркальным отражением данной точки.

#### Гомология на плоскости и в пространстве

Зеркальная симметрия на плоскости является частным случаем плоскостной гомологии. Определение гомологии на плоскости и основные принципы построения соответственных точек даны в главе 1.5 первой части методических указаний [12]. Чертеж на *ил. 2.1.1* можно трактовать как частный случай плоскостной гомологии – зеркальную симметрию. Тожественной прямой (осью гомологии) является ось симметрии. Центр гомологии находится в бесконечности на пересечении перпендикуляров к оси симметрии, а соответственные точки находятся на равных расстояниях от оси.

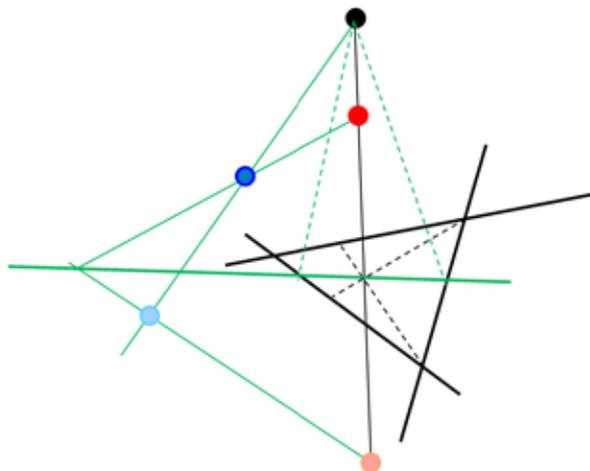
Пространственная гомология отличается от плоскостной тем, что имеет не тождественную прямую (ось), но тождественную плоскость.

На *ил. 2.1.3* представлена схема построения соответственных точек в пространственной гомологии. Тожественная плоскость условно задана тремя черными утолщенными прямыми, центр гомологии – точка со сплошной черной заливкой, заданная пара соответственных точек (красная и розовая). Построение произвольной пары соответственных точек (синяя и голубая) показано зелеными линиями.

Произвольная точка и заданная пара соответственных точек определяют плоскость, пересечение которой с тождественной плоскостью дает тождественную прямую (утолщенная зеленая). Далее построения осуществляются по алгоритму плоскостной гомологии.

Зеркальная симметрия в пространстве является частным случаем пространственной гомологии, где тождественной плоскостью

гомологии (плоскость симметрии) является отражающая плоскость (зеркало), а центр гомологии находится в бесконечности на пересечении перпендикуляров к этой плоскости. Соответственные точки находятся на равных расстояниях от тождественной



Ил. 2.1.3

плоскости. Следовательно, построение зеркальных отражений аналогично построению соответственных точек в пространственной гомологии.

## 2.2. Плоскостные отражения в перспективе

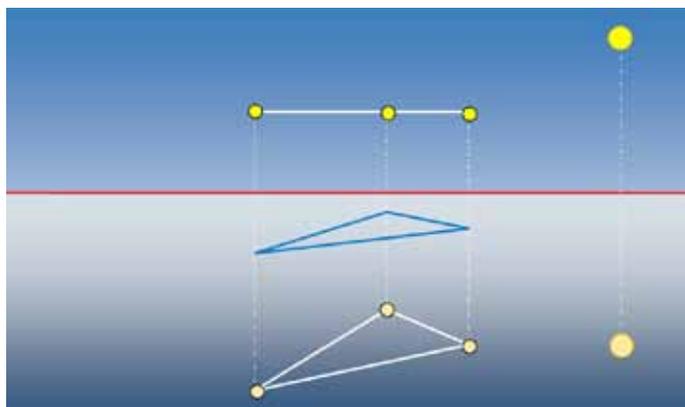
Так как отраженные изображения в плоском зеркале симметричны реальным, то, следовательно, перспективные изображения реальных и отраженных объектов выстраиваются по одним и тем же алгоритмам. Перспективная зеркальная симметрия отличается от пространственной тем, что на перспективных изображениях (проекциях) отношения перпендикулярности и равенства не являются перспективными инвариантами и не сохраняются.

Наиболее распространенным отражением, встречающимся в природе, является отражение на спокойной поверхности воды.



Ил. 2.2.1

На *ил. 2.2.1* непосредственно видно, что отраженные изображения симметричны реальным относительно плоскости воды.

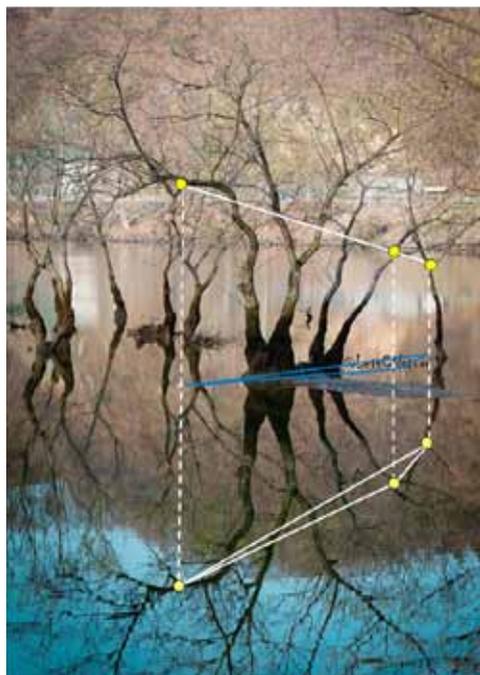


Ил. 2.2.2

На *ил. 2.2.2* представлен пример отражения на горизонтальной плоскости. Справа изображен объект, удаленный на расстояние неизмеримо большее, нежели размеры изображения. В этом случае объект с достаточно высокой степенью точности можно считать бесконечно удаленным. Такой объект (например, луна или

солнце) и его отражение находятся на равных расстояниях от линии горизонта.

Изображения трех представленных на рисунке точек находятся на одной горизонтальной прямой. Установить по одной проекции положение этих точек в пространстве невозможно. Имеющиеся отражения позволяют определить их глубинное положение и высоту над отражающей плоскостью. Точки и их отражения находятся на равных расстояниях от отражающей горизонтальной плоскости.



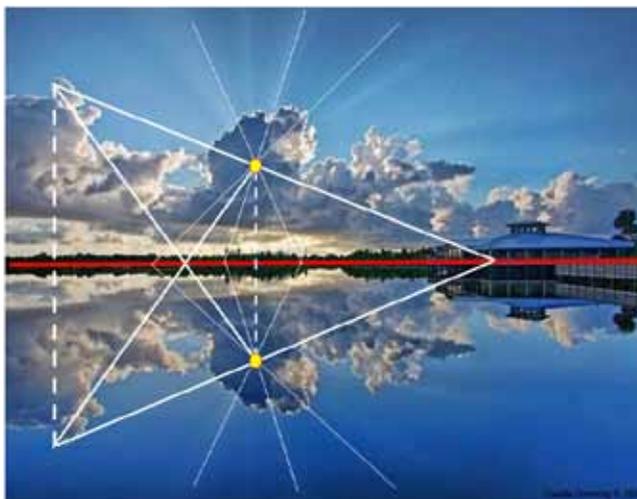
Ил. 2.2.3

На *ил. 2.2.3* на прямой выделены три точки. Имеющиеся на фотографии отражения этих точек позволяют определить их глубинное и высотное положение. Синий треугольник лежит в плоскости воды.



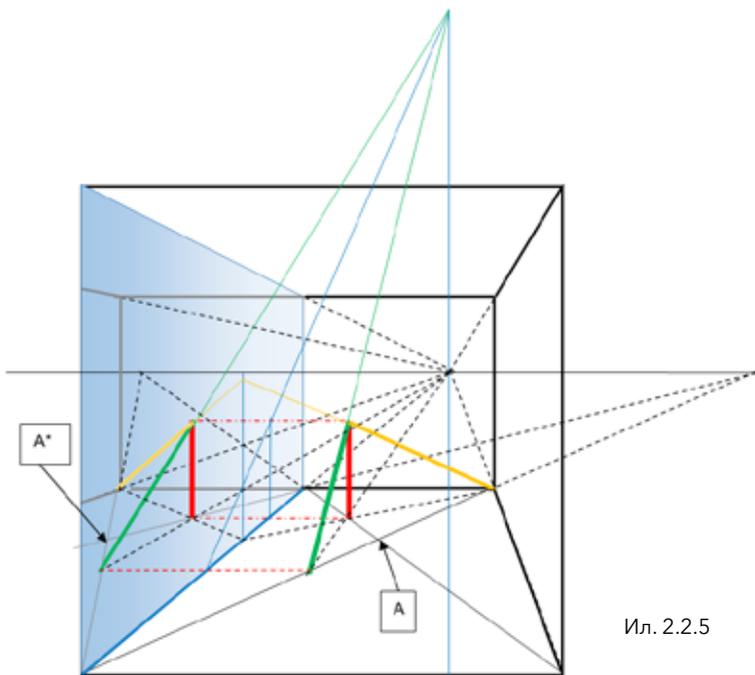
Ил. 2.2.3а

На *ил. 2.2.3а* изображение солнца и его отражение находятся на равных расстояниях от линии горизонта.



Ил. 2.2.4

На *ил. 2.2.4* солнце скрыто облаками, но расходящиеся лучи, видные на небе и на отражениях в воде, позволяют определить на

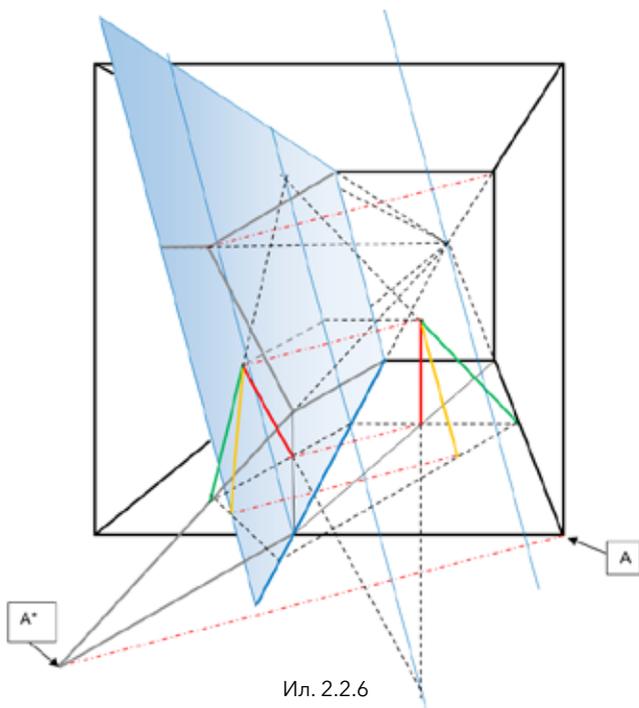


Ил. 2.2.5

картине положение солнца и положение его отражения, которые находятся на равных расстояниях от линии горизонта. Облака также с достаточно высокой степенью приближения можно считать бесконечно удаленными объектами. Следовательно, любая точка на облаке и ее отражение должны находиться примерно на равных расстояниях от линии горизонта, что и имеет место на представленной фотографии.

Рассмотрим несколько примеров построения отражений в перспективе при частных положениях зеркала. На всех последующих чертежах перспектива задана проекцией единичного куба, передняя грань которого параллельна картинной плоскости.

На *ил. 2.2.5* плоскость зеркала перпендикулярна картине и горизонтальной плоскости. Построения отражений в этом случае совершенно аналогичны построениям отражений в горизонтальной плоскости. Точки и их отражения находятся на равных расстояниях



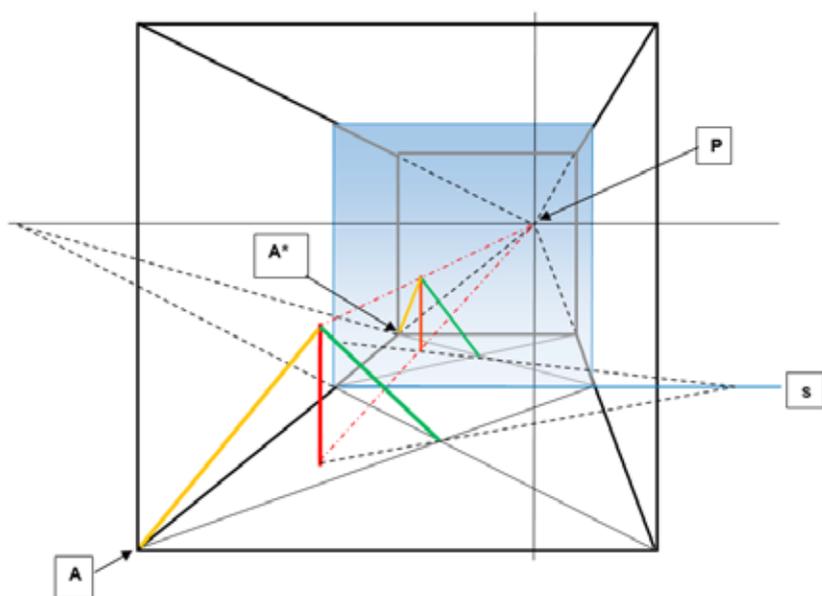
Ил. 2.2.6

от плоскости зеркала. На рисунке построены отражения точки  $A$ , ребер единичного куба, а также отражения вертикального и двух наклонных отрезков. Продолжения наклонных отрезков, показанные тонкими линиями, пересекаются в плоскости зеркала. Зеленый и красный отрезки параллельны плоскости зеркала и пересекаются со своими отражениями в бесконечно удаленных точках на проекции бесконечно удаленной прямой плоскости зеркала.

Между точками объекта и точками его отражения в перспективе устанавливается параллельная пространственная гомология. Центр гомологии – бесконечно удаленная точка на линии горизонта. Тожественная плоскость гомологии – плоскость зеркала. В плоскости пола осью гомологии является линия пересечения плоскостей пола и зеркала.

На *ил. 2.2.6* плоскость зеркала перпендикулярна картине и расположена под произвольным углом к горизонтальной плоскости.

Построения отражений в этом случае также аналогичны построениям отражений в горизонтальной или вертикальной плоскостях. Точки и их отражения находятся на равных расстояниях от плоскости зеркала. Тонкими синими линиями показаны прямые, лежащие в плоскости зеркала и параллельные картине. Построены отражения ребер куба и трех отрезков. Для полной аналогии с предыдущими вариантами можно развернуть чертеж так, чтобы плоскость зеркала стала горизонтальной или вертикальной.



Ил. 2.2.7

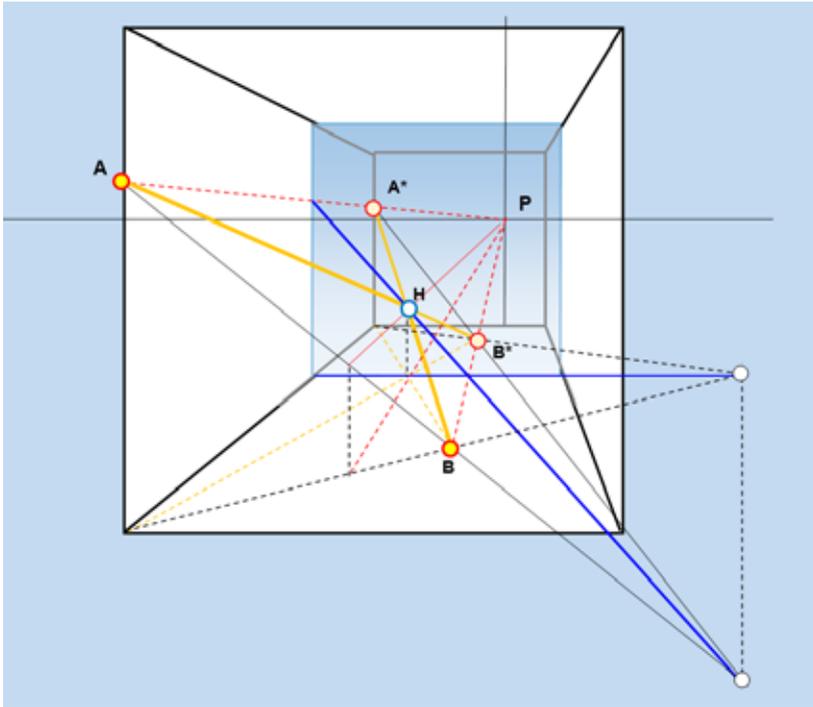
На ил. 2.2.7 плоскость зеркала параллельна картинной плоскости. Для точки  $A$  построено ее отражение – точка  $A^*$ .

Точки  $A$  и  $A^*$  находятся на перспективно равных расстояниях от плоскости зеркала. В данном примере для построения зеркально соответственных точек  $A - A^*$  использованы диагонали квадратов.

Таким образом, в перспективе устанавливается центральная гомология. Для плоскости пола осью гомологии (тождественной прямой) является основание зеркала – прямая  $s$ . Для пространства

тождественной плоскостью является плоскость зеркала. Центр гомологии  $P$  – главная точка картины.

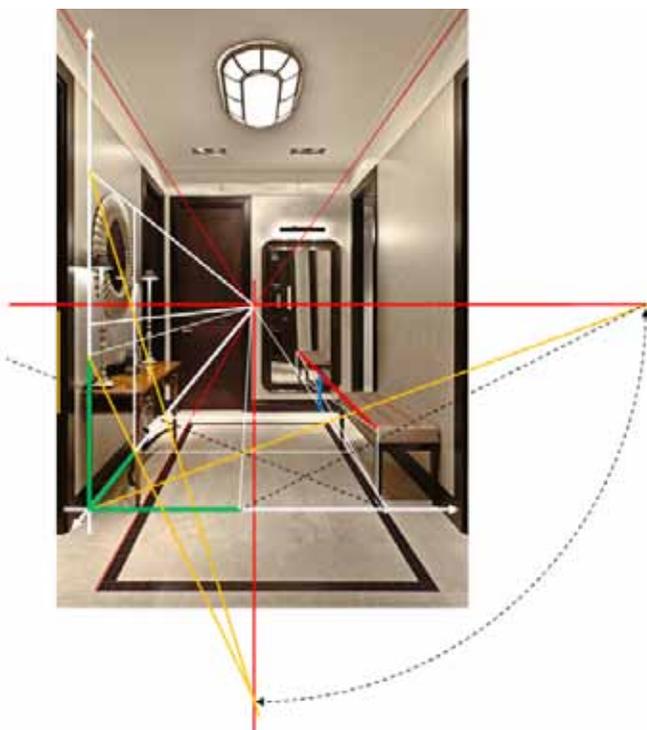
При помощи заданной гомологии построены отражения вертикального и двух наклонных отрезков.



Ил. 2.2.7а

На *ил. 2.2.7а* представлена перспективная трехмерная интерпретация плоскостного изображения на *ил. 2.1.1*, поясняющего закон отражения. Если в точку  $A$  поместить лазерный источник света и направить луч в точку  $H$ , принадлежащую плоскости зеркала, то, отразившись, этот луч пересечется с плоскостью пола в точке  $B$ .

Точки  $A^*$  и  $B^*$  являются отражениями точек  $A$  и  $B$ . Три точки –  $A, H, B$  – определяют плоскость, пересечение которой с плоскостью зеркала показано утолщенной синей линией.

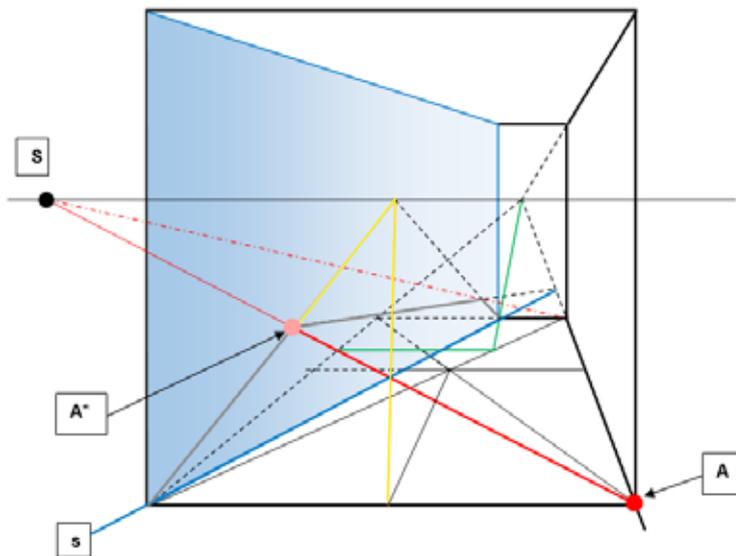


Ил. 2.2.8

На *ил. 2.2.8* плоскость зеркала параллельна картинной плоскости. Графические построения показывают, что зеркально соответственные изображения точек и прямых находятся на перспективно равных расстояниях от плоскости зеркала.

Круглое зеркало слева позволяет построить описанный квадрат, найти диагональные точки схода и определить дистанционное расстояние, благодаря чему можно задать перспективный масштаб глубины в условной единице измерения. Единичные отрезки по трем координатным осям выделены зеленым. На основании построенной перспективной системы координат можно по фотографии произвести обмер данного интерьера в условных единицах измерения. На фото штрихами показано построение квадратов, равных единичному.

Если известен диаметр зеркала (истинная величина условной единицы), то условные размеры могут быть переведены в реальные с достаточно высокой точностью.



Ил. 2.2.9

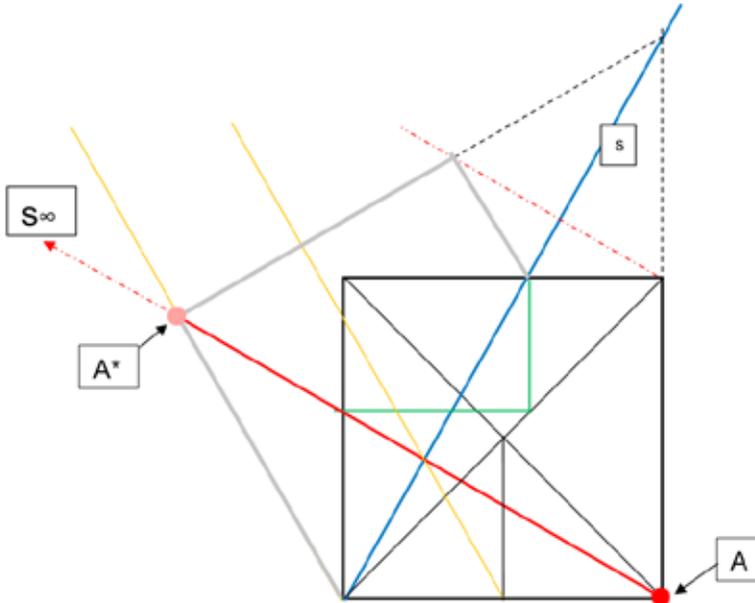
На *ил. 2.2.9* плоскость зеркала перпендикулярна горизонтальной плоскости и расположена под произвольным углом к картине. Показано построение отражения  $A^*$  для точки  $A$ .

Для построения отраженной точки  $A^*$  из точки  $A$  выстраивается прямая, перспективно перпендикулярная основанию зеркала  $s$  (построение показано зелеными прямыми). От основания построенного перпендикуляра по другую сторону зеркала откладывается отрезок, перспективно равный длине перпендикуляра, что дает положение искомой точки  $A^*$  (построение показано желтыми прямыми).

Пересечение построенного перпендикуляра с линией горизонта дает точку схода всех перпендикуляров к плоскости зеркала. Эта точка  $S$  является центром гомологии.

Таким образом зеркальная гомология в перспективе задана центром  $S$ , тождественной плоскостью зеркала и парой соответственных точек  $A - A^*$ .

Так как любая прямая, принадлежащая тождественной плоскости, также является тождественной, линия пересечения зеркала с полом может быть принята за ось гомологии  $s$  в плоскости пола.

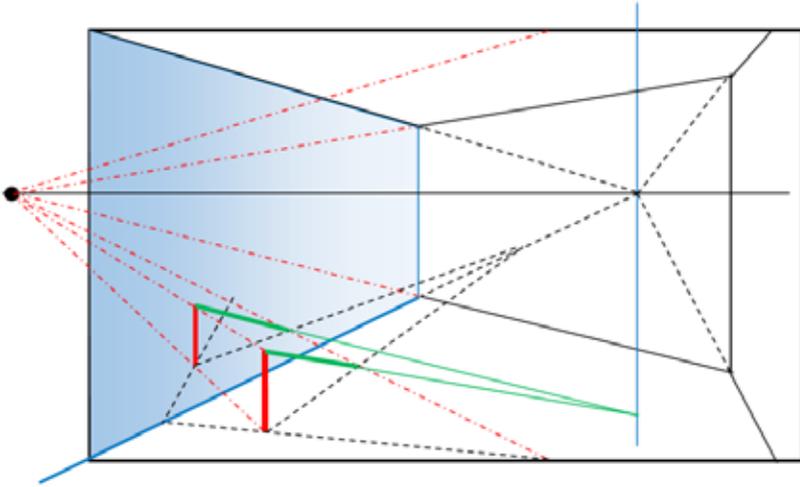


Ил. 2.2.10

На *ил. 2.2.10* вышеприведенное перспективное построение показано в ортогональной проекции. В плане построены точки  $A$  и  $A^*$ , зеркально симметричные относительно оси  $s$ . Построение перпендикулярных прямых и равных отрезков осуществляется на базе координатного квадрата проективными методами без произведения измерений.

Зелеными линиями показано построение прямой, перпендикулярной основанию плоскости зеркала (красная).





Ил. 2.2.11а

Найденная точка схода перпендикуляров к плоскости зеркала позволяет построить интерьер прямоугольной комнаты, расположенной под произвольным углом к картине (ил. 2.2.11а).

На ил. 2.2.12 плоскость зеркала перпендикулярна горизонтальной плоскости и расположена под произвольным углом к картине. На пересечении горизонтальных прямых найдена линия горизонта. Геометрическое построение показывает, что два вертикальных зеркально симметричных отрезка (желтые) находятся на перспективно равных расстояниях от плоскости зеркала.

Прямые, выделенные фиолетовым цветом и проходящие через основания желтых вертикальных отрезков и основания ножек кресел, пересекаются на линии основания зеркала (ось гомологии).

На фотографии имеется изображение квадратной столешницы. Это позволяет найти главную точку картины. Решение этой задачи показано на ил. 2.2.12а. Через вершину квадрата проводится горизонтальная прямая и выстраивается прямая, ей перпендикулярная, по алгоритму, показанному на ил. 2.2.10.

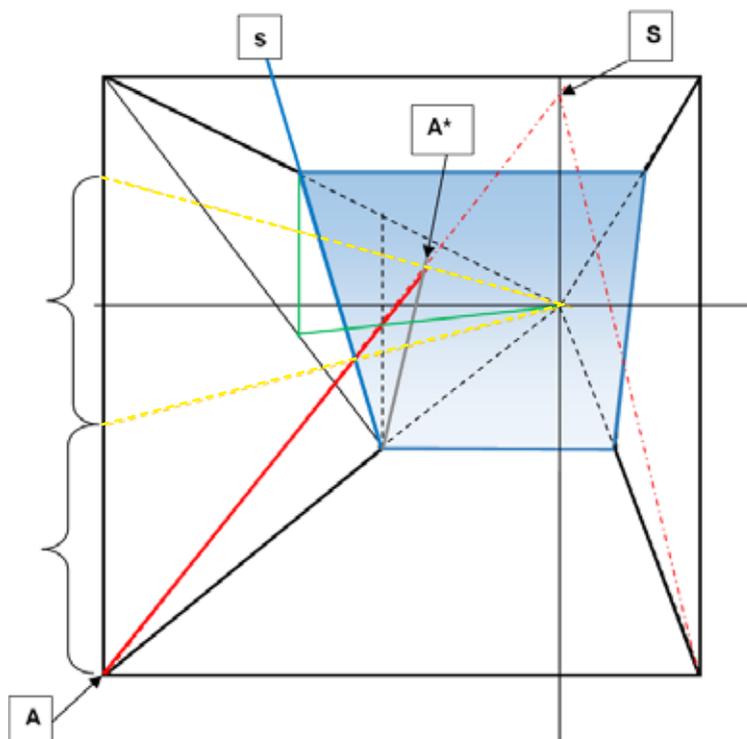
Пересечение этой прямой с горизонтом дает главную точку картины (красная).



Ил. 2.2.12



Ил. 2.2.12а



Ил. 2.2.13

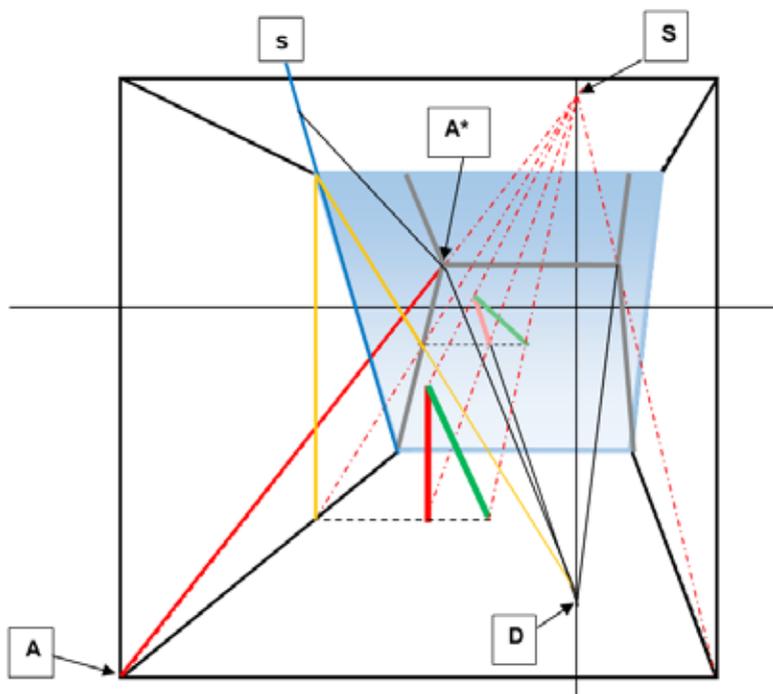
На *ил. 2.2.13* плоскость зеркала параллельна горизонту и наклонена под произвольным углом к горизонтальной плоскости.

Построение в перспективе точки  $A^*$ , зеркально симметричной точке  $A$ , аналогично построениям, показанным на *ил. 2.2.9* и *ил. 2.2.11*. Чтобы аналогия стала полностью очевидной, достаточно развернуть это изображение на  $90^\circ$ .

Бесконечно удаленной прямой для всех вертикальных плоскостей является вертикальная прямая, проходящая через главную точку.

Зеленым цветом показано построение перпендикуляра к плоскости зеркала (красный).

Желтым пунктиром показано построение на перпендикуляре точки  $A^*$ .



Ил. 2.2.14

Точка пересечения перпендикуляра к плоскости зеркала с вертикальной прямой, проходящей через главную точку, дает точку  $S$  схода всех перпендикуляров к зеркалу.

Найденная точка позволяет построить отраженное изображение плоскости пола. Зеркальная гомология в данной перспективе задана осью  $s$ , центром  $S$  и парой соответственных точек  $A-A^*$ .

На *ил. 2.2.14* показано построение отражений вертикального и наклонного отрезков, а также ребер куба. Все построения осуществляются в гомологии  $S, s, A-A^*$ .

Для нахождения точки схода отражений вертикальных прямых построены вертикальная прямая и ее отражение (желтые). Найденная точка  $D$  является точкой схода отражений всех вертикальных прямых, в том числе и вертикальных ребер куба.

Все рассмотренные выше частные случаи расположения зеркал относительно картинной плоскости можно свести к трем вариантам:

– плоскость зеркала перпендикулярна плоскости картины (ил. 2.2.2, 2.2.5, 2.2.6);

– плоскость зеркала параллельна плоскости картины (ил. 2.2.7, 2.2.7а);

– плоскость зеркала перпендикулярна горизонтальной или вертикальной плоскостям (ил. 2.2.9– 2.2.11а, 2.2.13, 2.2.14).

Эти частности позволяют строить отраженные изображения достаточно простыми способами.

В зеркальной плоскости общего положения построение отраженных изображений представляет собой более сложную задачу. Для облегчения восприятия удобнее разделить эту задачу на три этапа:

1. Построение перпендикуляра к плоскости зеркала и нахождение его точки пересечения с плоскостью зеркала.

2. Нахождение точки схода перпендикуляров к плоскости зеркала.

3. Построение пары зеркально симметричных точек.

Решение этих трех задач позволяет установить на картине пространственную гомологию и все дальнейшие построения осуществлять нахождением соответственных точек в заданной гомологии.

На ил. 2.2.15 представлен случай, когда зеркало расположено произвольным образом по отношению к картинной плоскости.

На фотографии строить отраженные изображения не требуется, так как они уже имеются. Эти изображения позволяют решить промежуточные задачи первого и второго этапов. Прямые, соединяющие пары зеркально симметричных точек, перпендикулярны плоскости зеркала. На фотографии красным показаны три такие прямые. Эти прямые пересекаются в одной точке, которая является проекцией бесконечно удаленной точки схода перпендикуляров. Таким образом, на каждом перпендикуляре имеется по три точки (пара зеркально симметричных точек и точка схода

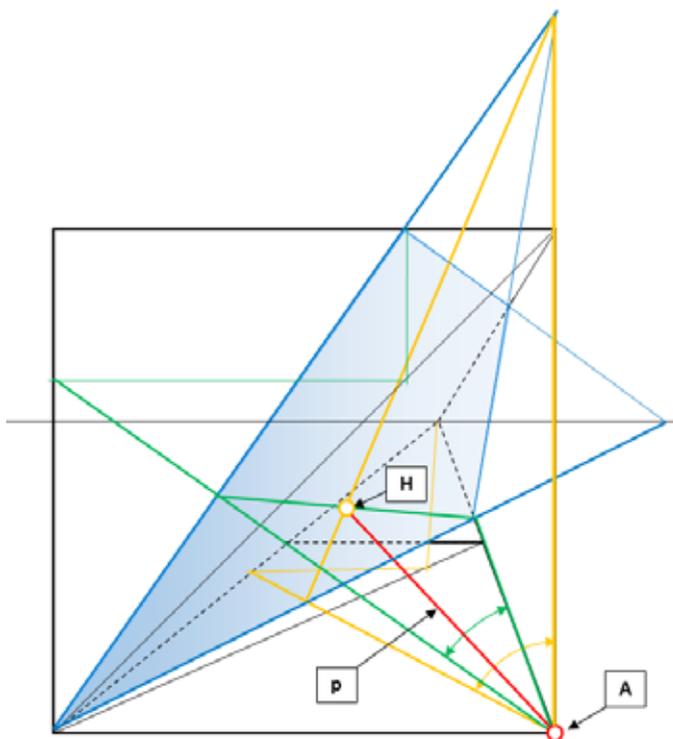


Ил. 2.2.15

перпендикуляров), что определяет перспективную шкалу на прямой. Чтобы найти точку пересечения перпендикуляра с плоскостью зеркала, достаточно разделить пополам в перспективе расстояние между зеркально симметричными точками. Это построение для одного из перпендикуляров показано желтыми линиями, а результат – синим кружочком. Полученная точка находится за пределами зеркала, но в его плоскости.

1. Построение перпендикуляра к плоскости зеркала и нахождение его точки пересечения с плоскостью зеркала.

На *ил. 2.2.16* показано построение перпендикуляра  $p$  из точки  $A$  к плоскости зеркала. Чтобы не перегружать чертеж большим количеством линий, проекция куба изображена не полностью. Показаны только его фронтальная и горизонтальная грани (утолщенные черные линии). Плоскость зеркала задана двумя пересекающимися прямыми, принадлежащими фронтальной и горизонтальной граням куба (показаны утолщенными синими линиями).



Ил. 2.2.16

Через точку  $A$  строим прямую, перспективно перпендикулярную линии пересечения плоскости зеркала с горизонтальной плоскостью (показано тонкими желтыми линиями).

Плоскость, заданная построенной прямой и вертикальным ребром куба (желтая), перпендикулярна к линии пересечения плоскости зеркала с горизонтальной плоскостью, так как эта прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости (горизонтальной и вертикальной). Следовательно, плоскость зеркала перпендикулярна к построенной плоскости как плоскость, проходящая через перпендикуляр к этой плоскости. Аналогичным образом через точку  $A$  выстраивается вторая плоскость (зеленая), также перпендикулярная зеркалу.

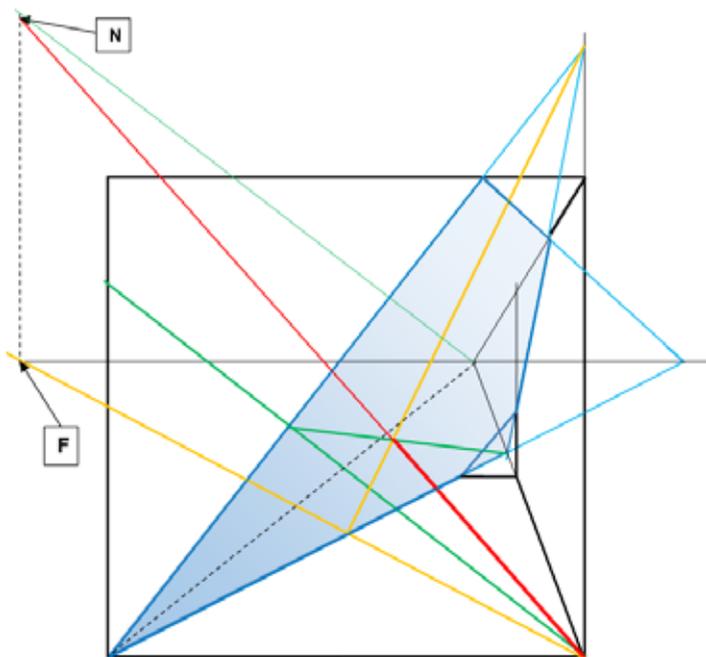
Пересечение этих плоскостей дает перпендикуляр к плоскости зеркала  $p$  (красный), проходящий через  $A$ , и точку  $H$  пересечения этого перпендикуляра с зеркалом.

Три ребра куба, сходящиеся в вершине  $A$ , образуют три взаимно перпендикулярные плоскости. Произвольная секущая плоскость (в данном случае зеркало) пересекает ребра в трех точках и образует прямоугольный тетраэдр. Отметим, что точка пересечения перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольного тетраэдра на основание, лежит на пересечении высот основания.

2. Нахождение точки схода перпендикуляров к плоскости зеркала.

На *ил. 2.2.17* показаны два способа построения точки схода перпендикуляров к плоскости зеркала.

Все перпендикуляры к плоскости параллельны между собой и, следовательно, пересекаются в бесконечно удаленной точке.



Ил. 2.2.17



Так как построенный перпендикуляр принадлежит вертикальной плоскости (желтая), то для нахождения проекции бесконечно удаленной точки достаточно найти точку пересечения его горизонтальной проекции с линией горизонта, а затем спроецировать полученную точку  $F$  на перпендикуляр. Полученная точка  $N$  является искомой точкой схода перпендикуляров.

Построение, показанное тонкой зеленой линией, дает тот же результат. Прямая, показанная утолщенной зеленой линией, лежит в картинной плоскости и в плоскости, проходящей через главную точку. Следовательно, проекция бесконечно удаленной прямой этой плоскости параллельна выделенной прямой и проходит через главную точку (тонкая зеленая прямая). Пересечение этой прямой с перпендикуляром дает искомую точку  $N$ .

### 3. Построение пары зеркально симметричных точек.

Для решения этой задачи необходимо от точки  $H$  пересечения перпендикуляра с плоскостью зеркала отложить отрезок, перспективно равный отрезку  $AH$ .

На *ил. 2.2.18* показано два способа построения точки  $A^*$  зеркально симметричной точке  $A$  в заданной перспективе.

Точка пересечения перпендикуляра с зеркалом  $H$  проецируется на горизонтальную плоскость. Полученный отрезок перспективно удваивается и проецируется обратно на перпендикуляр. Полученная точка  $A^*$  является отражением точки  $A$ . Построения показаны пунктиром.

Второй способ показан тонкими зелеными линиями и основан на общем алгоритме установления соответствия между равномерной (основание картины) и перспективной (перпендикуляр) шкалами.

На *ил. 2.2.19* построены отражения ребер куба и отражения красного, желтого, зеленого и фиолетового отрезков.

### 2.3. Отражения в сферической поверхности

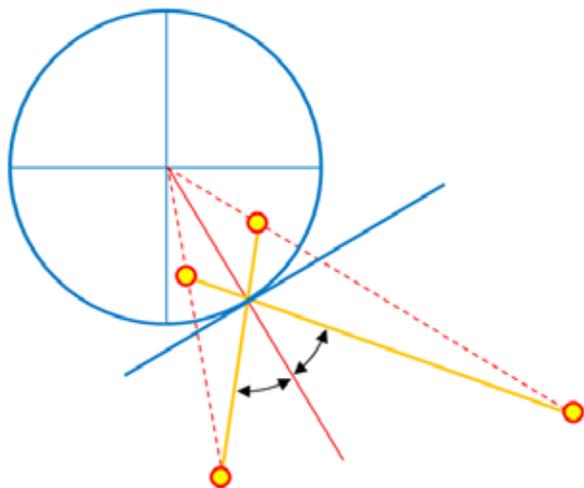
Отражения в плоском зеркале наиболее привычно отображают окружающую реальность и наиболее просты в построениях. Помимо плоскостных отражений, существует бесчисленное

множество отражений в криволинейных зеркальных поверхностях. Разнообразие таких отражений столь же бесконечно, как бесконечно и разнообразие поверхностей. Среди множества криволинейных поверхностей можно выделить подмножество закономерных поверхностей, образование которых подчиняется определенным правилам. Многие из этих поверхностей имеют собственные наименования. Примерами могут служить цилиндр, сфера, эллипсоид, параболоид, гиперboloид, тор и т. д.

Наиболее простой закономерной замкнутой криволинейной поверхностью является сфера. Построение отраженных изображений в сферическом зеркале сложнее, чем на плоскости, но также подчиняется строгим геометрическим законам.

Согласно закону отражения, падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром к плоскости, касательной к данной сферической поверхности в точке падения.

Углы, образованные падающим и отраженным лучами с перпендикуляром к касательной плоскости, восстановленным из точки падения, равны.



Ил. 2.3.1. Схема отражения в сферической поверхности

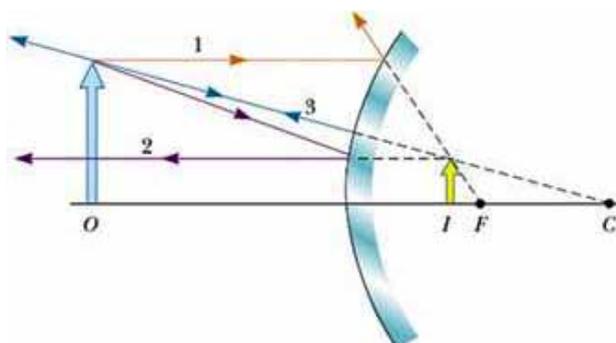
На *ил. 2.3.1* представлена схема отражения в сферической поверхности.

Построение изображения в сферическом выпуклом зеркале

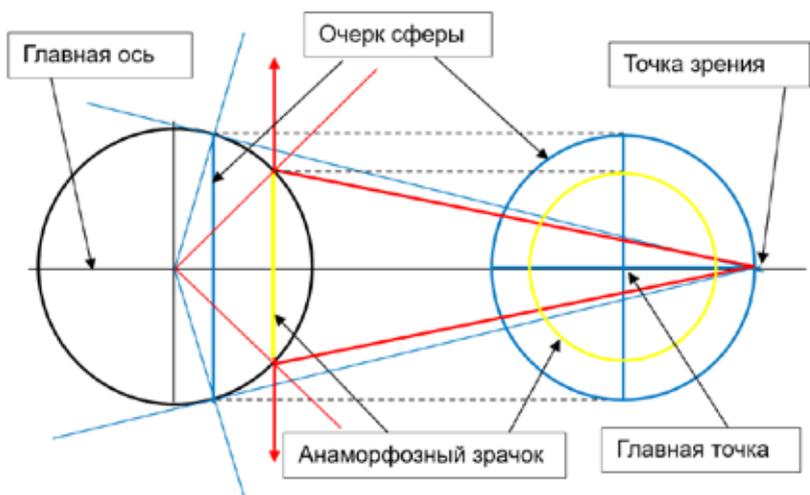
Построение, показанное на *ил. 2.3.2*, является приблизительным и пригодно только для небольшой области зеркала вблизи главной оси.

Оранжевыми прямыми на фотографии справа показано, что объект и его отражение лежат на прямой, проходящей через главную точку (отражение объектива камеры).

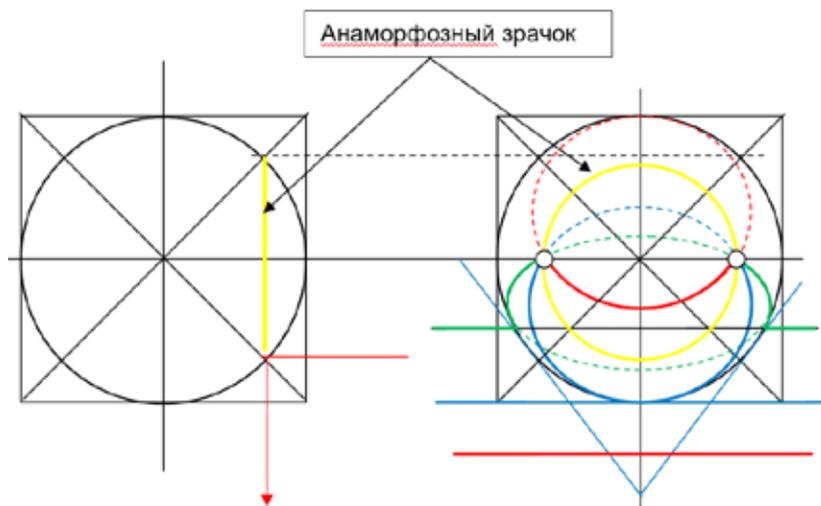
На фотографии зеркало немного развернуто влево. По этой причине главная точка не совпадает с центром окружности зеркала, являющегося фрагментом сферы.



Ил. 2.3.2



Ил. 2.3.3. Элементы, формирующие сферическое отражение



Ил. 2.3.4

На *ил. 2.3.3* представлены основные элементы, формирующие сферическое отражение.

Очерк сферы – окружность, образованная множеством точек касания к сфере прямых, проходящих через точку зрения. Если точка зрения находится в бесконечности, то диаметр очерка равен диаметру сферы. Иначе говоря, очерк сферы – это внешняя граница видимой части сферы. Главная ось – прямая, проходящая через центр сферы и точку зрения. Анаморфозный зрачок – окружность, образованная отражениями бесконечно удаленных точек плоскости, перпендикулярной главной оси.

На *ил. 2.3.4* представлены отражения трех прямых (синяя, зеленая, красная), перпендикулярных главной оси. Отраженные изображения этих прямых представляют собой дуги эллипсов, проходящих через диаметрально противоположные точки анаморфозного зрачка. Если прямая пересекает очерк сферы, то дуга эллипса, отображающего эту прямую, касательна к очерку сферы в точке пересечения. На рисунке показана утолщенными зелеными линиями.

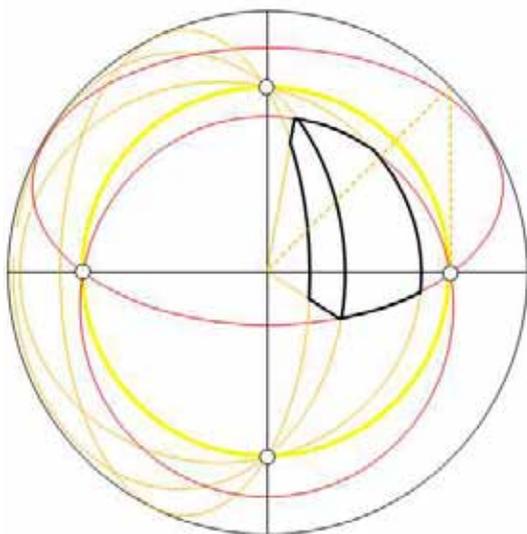
При отражении в сферической поверхности прямые, пересекающие главную ось, отображаются прямыми. Прямые, параллельные главной оси, пересекают главную ось в бесконечно удаленной точке и, следовательно, также отображаются прямыми.

Отмеченные свойства позволяют построить сферическое отражение вертикального параллелепипеда (*ил. 2.3.5*). Кружочками обозначены точки схода отражений горизонтальных и вертикальных прямых, перпендикулярных главной оси.

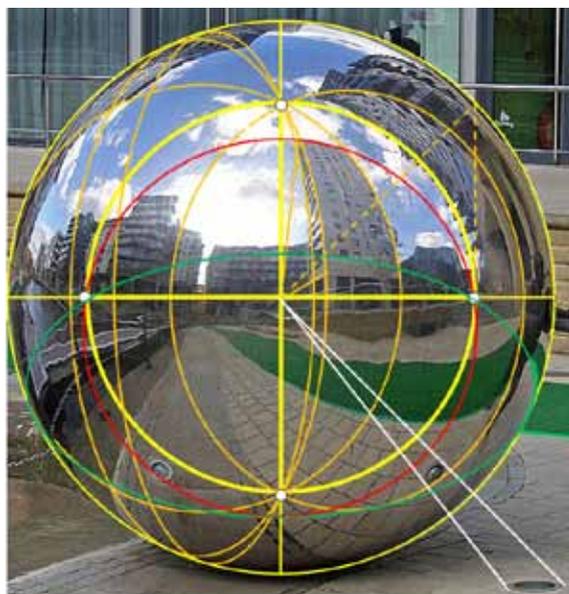
Попутно стоит отметить, что в данном случае возникает очередная неевклидова геометрия, в которой все прямые пересекаются в одной точке, а параллельные – в двух. Отражения зданий в сферическом зеркале на *ил. 2.3.6* с достаточной точностью соответствуют теоретическим построениям.

Отражение зеленой прямой в правой нижней части фотографии является дугой эллипса, касательного к очерку сферы в точке его пересечения с этой прямой (см. *ил. 2.3.4*).

Белые прямые показывают, что объект и его отражение находятся на прямой, проходящей через центр сферы.



Ил. 2.3.5



Ил. 2.3.6



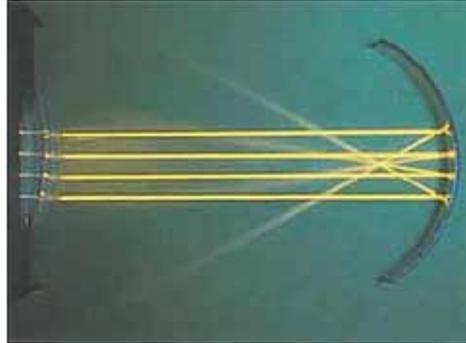
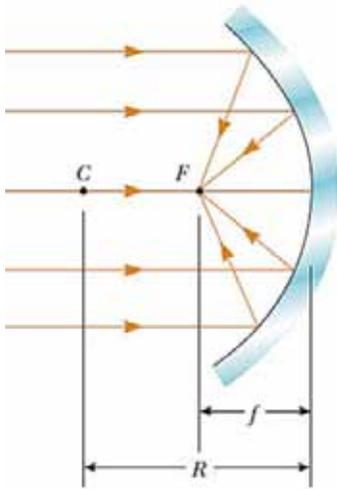
Ил. 2.3.6а

На *ил. 2.3.6а* выделено отраженное изображение прямой, перпендикулярной главной оси (желтая). Отражение этой прямой представляет собой дугу эллипса, проходящего через отражения бесконечно удаленных точек этой прямой на анаморфозном зрачке. На фотографии выделены точка на прямой и ее отражение (зеленые). Справа белыми линиями показана геометрическая схема построения отражения этой точки (вид сбоку).

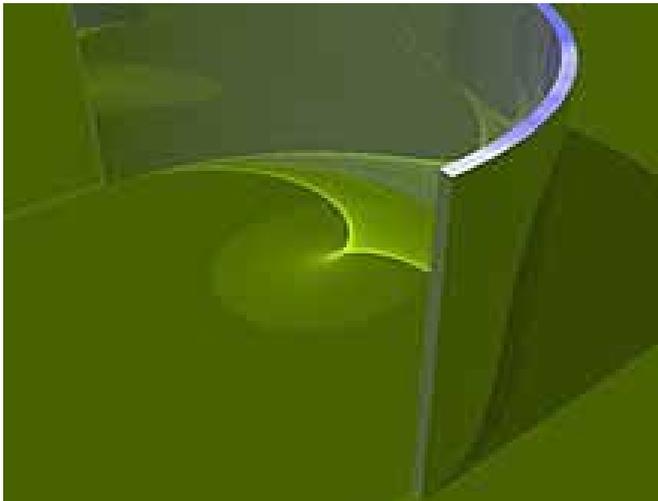
Пример такой перспективы можно увидеть в работах «Портрет четы Арнольфини» (1434) фламандца Яна ван Эйка, «Меняла и его жена» (1514) Квентина Массейса, «Автопортрет в выпуклом зеркале» (ок. 1524) итальянского художника эпохи Ренессанса Пармиджанино (Джироламо Франческо Мария Маццола), «Виде на Делфт» (1652) ученика Рембрандта Карела Фабрициуса, в произведениях нидерландского графика Маурица Корнелиса Эшера (например, литографии «Натюрморт с отражающим шаром» (1934), «Автопортрет в сферическом зеркале» (1935)).

## Отражения в сферическом вогнутом зеркале

Для сферического зеркала показанное на *ил. 2.3.7* построение является приблизительным и соответствует реальности лишь на небольшой области вблизи главной оси.

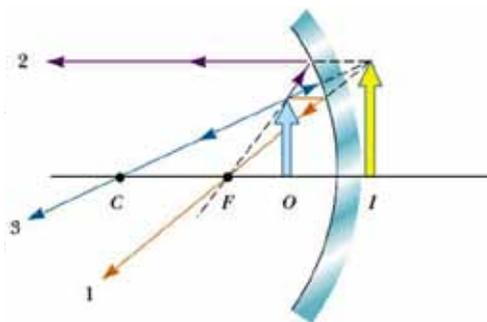


Ил. 2.3.7. С – центр кривизны;  
R – радиус кривизны;  
F – фокусная точка зеркала;  
f – фокусное расстояние, равное половине радиуса ( $R/2$ )

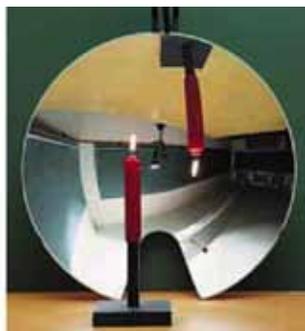
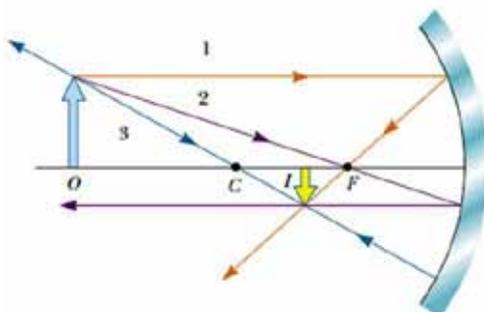


Ил. 2.3.8

Реальная картина отражения, представленная на *ил. 2.3.8*, много сложнее и на данном этапе рассматриваться не будет.



Ил. 2.3.9. Предмет между зеркалом и фокусом.  
Изображение прямое, увеличенное



Ил. 2.3.10. Предмет за фокусом и центром.  
Изображение перевернутое, уменьшенное

Отраженное изображение может быть прямым или перевернутым в зависимости от положения предмета относительно фокуса вогнутого зеркала (*ил. 2.3.9 и 2.3.10*).

### III. ПОСТРОЕНИЕ ПРЕЛОМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Явления отражения и преломления света известны с глубокой древности. Они наблюдаются в любом водоеме со спокойной прозрачной водой. Но если закон отражения вследствие своей простоты (угол падения равен углу отражения) был известен еще в античные времена, то закон преломления был установлен только в XVII веке.



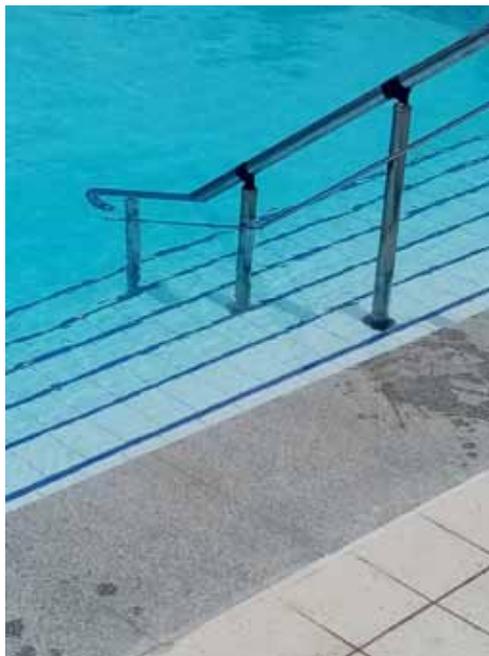
Ил. 3.1

Например, мастерам Ренессанса этот закон оставался неизвестным, и на картинах той эпохи можно найти множество примеров неправильного изображения предметов, полностью или частично погруженных в воду.

Несмотря на то, что в настоящее время закон преломления давно и хорошо известен, методы построения преломленных изображений в перспективе практически не освещены в учебной литературе, и современные художники, не имея необходимых знаний, часто совершают аналогичные ошибки.

Явление преломления названо так потому, что объект, под углом погруженный в воду, визуально кажется преломленным (*ил. 3.1 и ил. 3.1а*).

Следует обратить внимание, что вертикальные стойки перил на *ил. 3.1.а* не преломляются, а только сокращаются по высоте.



Ил. 3.1а



Ил. 3.2

Кроме оптического обмана преломление может обеспечивать удивительную игру света и создавать картины изумительной красоты (ил. 3.2).

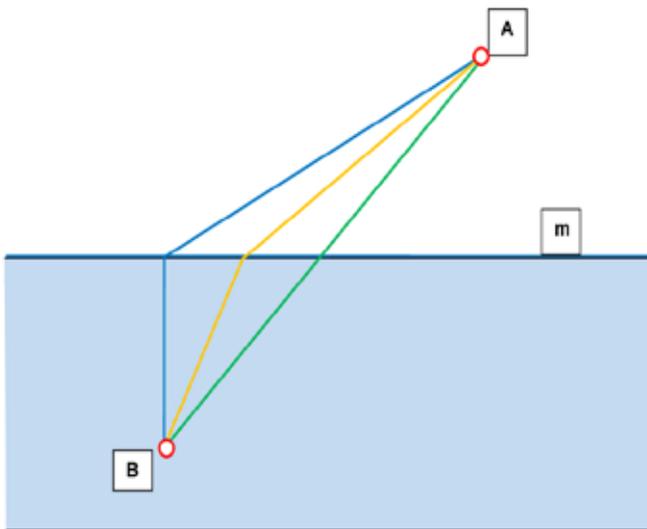
Временной разрыв в две тысячи лет, разделяющий законы отражения и преломления, тем более удивителен, что оба закона основываются на одном и том же принципе минимального времени.

Согласно этому принципу, из пункта *A* в пункт *B* свет распространяется по пути, который может быть пройден за минимальное время. В однородной среде (вакуум, воздух, вода и т. д.) свет распространяется с постоянной скоростью, следовательно, путь, занимающий минимальное время, и кратчайший путь совпадают. Это имеет место в случае прямой видимости и в случае отражения.

Максимальную скорость 3 000 000 км/с свет имеет в вакууме. В любой другой прозрачной материальной среде скорость света меньше этого значения. Чем больше оптическая плотность среды, тем медленнее в ней распространяется свет. Например, в некоторых сортах оптического стекла или в алмазе скорость света уменьшается более чем вдвое.

Следовательно, при переходе света из одной прозрачной среды в другую, например из воздуха в воду или обратно, скорость света изменяется. При этом путь, минимальный по времени, и кратчайший путь (прямая) могут не совпадать. Это различие и дает эффект, воспринимаемый как преломление.

Явление преломления можно пояснить на простом примере. Пусть нужно попасть из пункта  $A$  в пункт  $B$ , но эти пункты разделяет некоторая прямолинейная граница  $m$ , до которой можно доехать на автомобиле с большой скоростью  $v_1$ , а дальше следует идти пешком с меньшей скоростью  $v_2$ . В этом случае, прямая  $AB$  не является путем, который займет минимальное время (за исключением случая, когда прямая  $AB$  перпендикулярна  $m$ ). Чем больше разница между скоростями автомобиля и пешехода, тем больше путь, кратчайший по времени, будет отличаться от пути, кратчайшего по расстоянию.



Ил. 3.3

На *ил. 3.3* представлена графическая схема вышеизложенного. Зеленым цветом показан кратчайший по времени и по расстоянию

путь при равенстве скоростей до и после границы  $v_1 = v_2$ . Синим цветом показан кратчайший по времени путь, если  $v_1$  неизмеримо больше  $v_2$ . Оранжевым показан путь при промежуточных отношениях  $v_1/v_2$ .

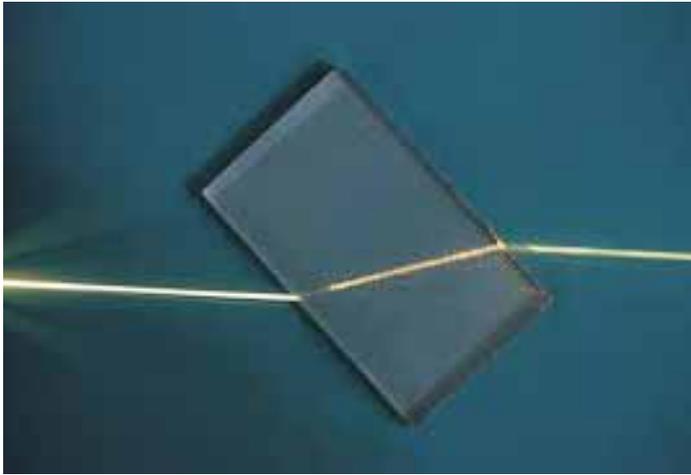
Следовательно, чем больше разница скоростей света для двух прозрачных сред, тем больше путь, минимальный по времени, отличается от кратчайшего (прямой) и тем сильнее эффект преломления.

### 3.1. Закон преломления

Отношение скоростей света  $v_1$  и  $v_2$  для двух сред есть величина постоянная ( $v_1/v_2 = const$ ). Отношение скорости света в прозрачной среде к скорости света в вакууме называется коэффициентом  $k$  или показателем преломления. Этот коэффициент показывает, насколько замедляется скорость света в данном прозрачном материале относительно скорости света в вакууме. Например, вода имеет коэффициент преломления 1,33, спирт – 1,36, стекло – 1,48–2,15, алмаз – 2,417, изумруд – 1,58, сапфир – 1,76.

Коэффициент преломления воздуха по отношению к вакууму ничтожен и составляет 1,0003, что в бытовых условиях практически не заметно и позволяет использовать вакуумные коэффициенты и для воздушной среды. Влияние преломления света в воздухе становится значительным только в огромных объемах и расстояниях. Например, при восходе солнца его диск виден раньше реального восхода за счет преломления света в сотнях километров земной атмосферы. Преломление света значительно усиливается при прохождении слоев теплого и холодного воздуха, что приводит к возникновению явлений, называемых миражами.

На ил. 3.1.1 показано преломление лазерного луча в стеклянной прямоугольной призме. Непосредственно по фотографии видно, что после двукратного преломления в двух параллельных плоскостях световой луч на выходе остается параллельным лучу на входе.



Ил. 3.1.1

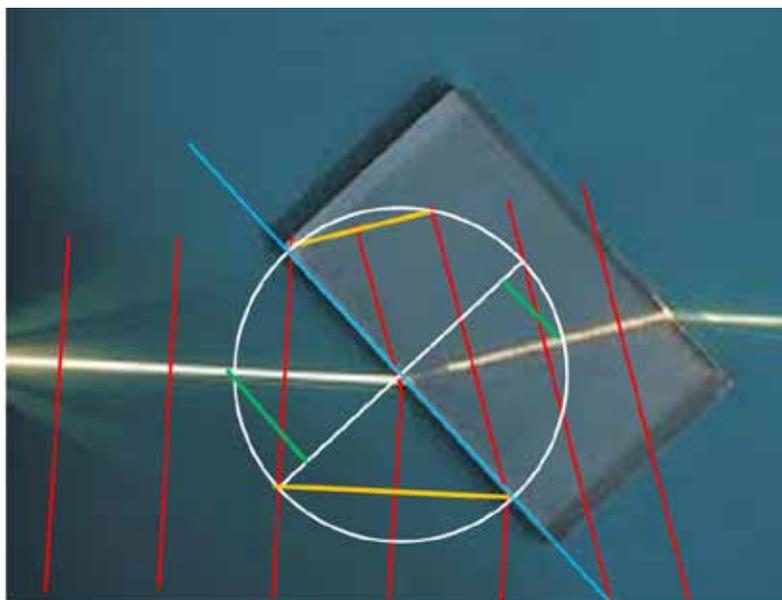
Данный пример является хорошей наглядной иллюстрацией закона обратимости светового луча. Если луч направить в обратном направлении, то результат будет аналогичным.

На *ил. 3.1.2* перпендикулярно падающему лучу от точки падения на произвольных равных расстояниях проведены прямые (красные). Расстояния между этими прямыми условно можно рассматривать как скорость падающего луча. Из точек пересечения этих прямых с границей двух сред проведены прямые, перпендикулярные преломленному лучу. Расстояния между полученными прямыми характеризуют скорость преломленного луча по отношению к скорости падающего. В данном примере видно, что скорость преломленного луча меньше скорости падающего.

Отношение этих расстояний или скоростей дает коэффициент (показатель) преломления  $v_1/v_2 = k$ .

Из точки падения луча проведена окружность, радиус которой принят за условную единицу. В принципе радиус окружности может быть любым, но удобнее провести окружность так, как показано на рисунке.

Перпендикуляры к падающему и преломленному лучам, проведенные из диаметрально противоположных точек окружности



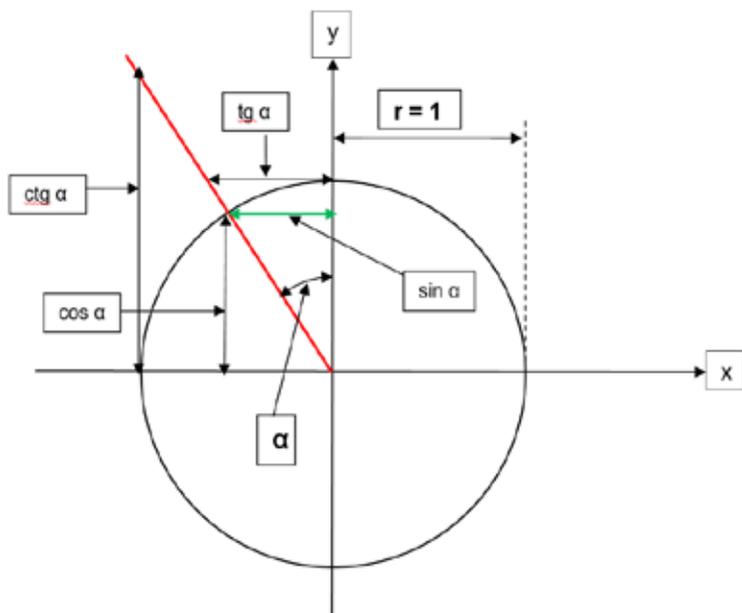
Ил. 3.1.2

(красные), определяют два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой (диаметр окружности).

Вторые катеты этих треугольников (желтые) параллельны падающему и преломленному лучам. Условно длины этих катетов также можно считать графическим выражением скоростей света в первой и во второй средах. Для данного рисунка имеет место отношение длин катетов или скоростей  $v_1/v_2 = 4,3/2,9 \approx 1,48 = k$ , что соответствует коэффициенту преломления стекла.

Из точек пересечения падающего и преломленного лучей с окружностью опущены перпендикуляры на перпендикуляр к границе сред в точке падения (зеленые).

Из подобия треугольников следует, что отношение длин зеленых отрезков равно отношению длин желтых отрезков и равно  $k$ . Но длины зеленых отрезков численно равны значениям синусов углов падения и преломления (см ил. 3.1.3).



Ил. 3.1.3

На *ил. 3.1.3* радиус окружности  $r$  принят равным 1. Следовательно, значения тригонометрических функций произвольного угла  $\alpha$  численно равны длинам отрезков, отмеченных на чертеже, относительно принятой единицы измерения.

Зеленым цветом показано значение синуса произвольного угла  $\alpha$ , численно равное длине  $x$  выделенного отрезка:

$$\sin \alpha = x / r = x / 1 = x.$$

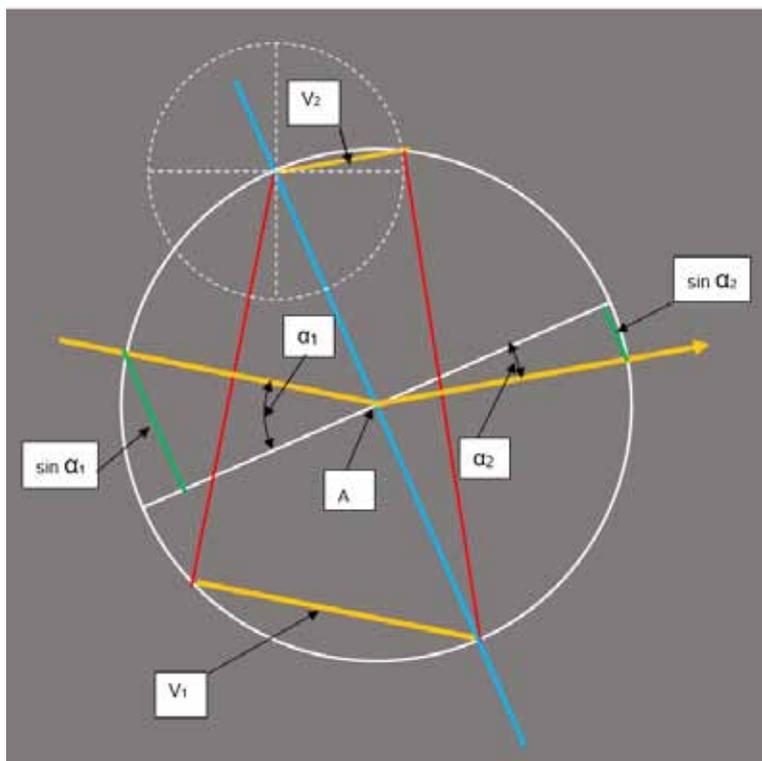
Отношения длин зеленых отрезков, соответствующих синусам углов падения и преломления на *ил. 3.1.2*, равно  $2,3/1,55 \approx 1,48$  и равно отношению скоростей света в данных средах, что соответствует коэффициенту преломления стекла. Следовательно,

$$v_1 / v_2 = \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = k.$$

Полученное равенство обычно и называют законом преломления (закон Снелла).

Падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром к преломляющей плоскости в точке падения. В случае криволинейной преломляющей поверхности – в одной плоскости с перпендикуляром к плоскости, касательной для данной поверхности в точке падения.

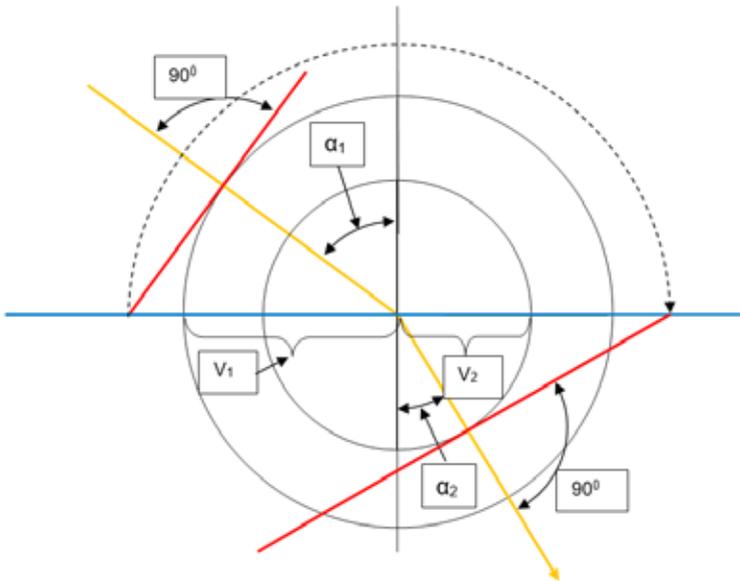
Отношение синусов углов, образованных падающим и преломленным лучами с перпендикуляром к преломляющей плоскости, восстановленным из точки падения, есть величина постоянная и равная отношению скоростей света в двух данных средах.



Ил. 3.1.4

На *ил. 3.1.4* представлен графический алгоритм построения преломленного луча при известном коэффициенте преломления  $k$ .

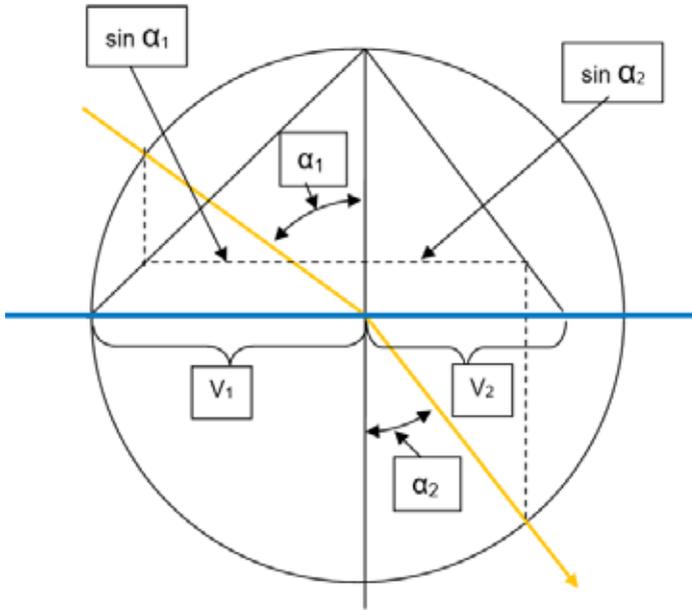
Из точки падения  $A$  проводится окружность произвольного радиуса (белая). Из точки пересечения окружности с границей сред проводится прямая, параллельная падающему лучу. Длина полученной хорды принимается за условную скорость света в первой среде  $v_1$ . Из диаметрально противоположной точки проводится окружность радиуса  $v_2 = v_1/k$  (белый пунктир). Пересечение окружностей дает хорду, параллельную направлению преломленного луча. Данный метод неудобен тем, что в зависимости от угла падения изменяются длины отрезков, соответствующих  $v_2$  и  $v_1$ .



Ил. 3.1.4а

На *ил. 3.1.4а* представлен усовершенствованный вариант выше-приведенного построения.

Постоянство отношения синусов углов падения и преломления совместно с закономерностями, показанными на *ил. 3.1.3*, позволяет предложить более простой и компактный графический способ построения преломленного луча относительно падающего при помощи соотношения катетов двух прямоугольных треугольников.



Ил. 3.1.5

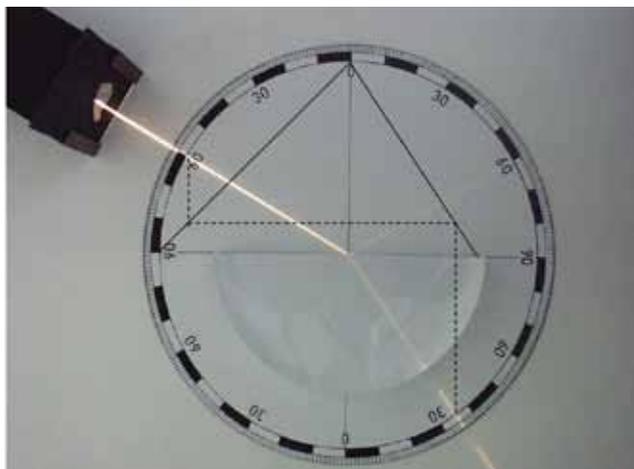
На *ил. 3.1.5* показан графический способ построения преломленного луча при заданных скоростях света  $v_1$  и  $v_2$  в двух средах или при заданном коэффициенте преломления. Радиус окружности и величина  $v_1$  приняты за единицу измерения.

В данном примере  $v_2 = 3/4 v_1$ , что соответствует преломлению света в водной среде.

На *ил. 3.1.6* решена обратная задача: по имеющемуся изображению установлен коэффициент преломления прозрачного материала.

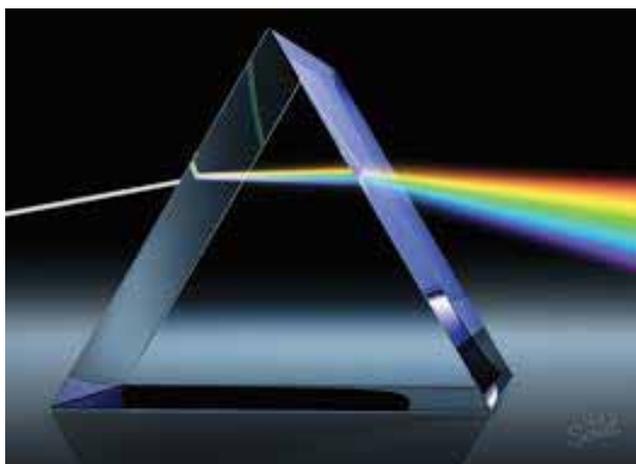
$v_1/v_2 = 4,3/2,9 \approx 1,48$ , что соответствует коэффициенту преломления стекла.

Таким образом, согласно закону преломления, отклонение светового луча от прямой тем больше, чем больше разность его скоростей в двух средах. Это позволяет объяснить эффект разложения солнечного света на спектральные составляющие.

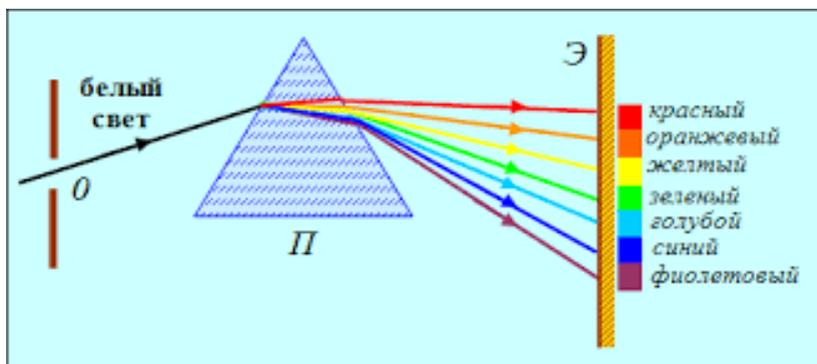


Ил. 3.1.6

На *ил. 3.1.7* видно, что при прохождении света через стеклянную призму красный свет преломляется меньше остальных. Следовательно, при прохождении через стекло или иной прозрачный материал красный свет имеет максимальную скорость, а фиолетовый – минимальную.



Ил. 3.1.7

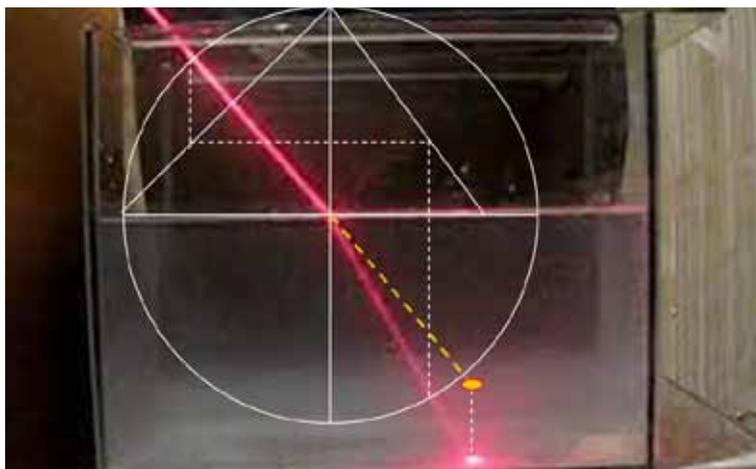


Ил. 3.1.8

На *ил. 3.1.8* представлена схема спектрального разложения видимой части солнечного света.

### 3.2. Преломленные изображения в перспективе

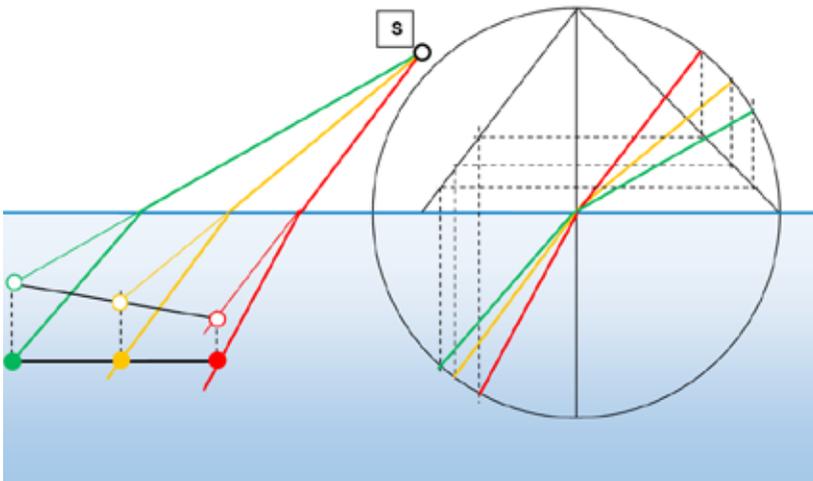
Графический алгоритм построения преломленного луча, показанный на *ил. 3.1.5*, позволяет построить изображение объекта таким, каким оно представляется наблюдателю после преломления света в прозрачной среде.



Ил. 3.2.1

На *ил. 3.2.1* показано преломление светового луча в воде.

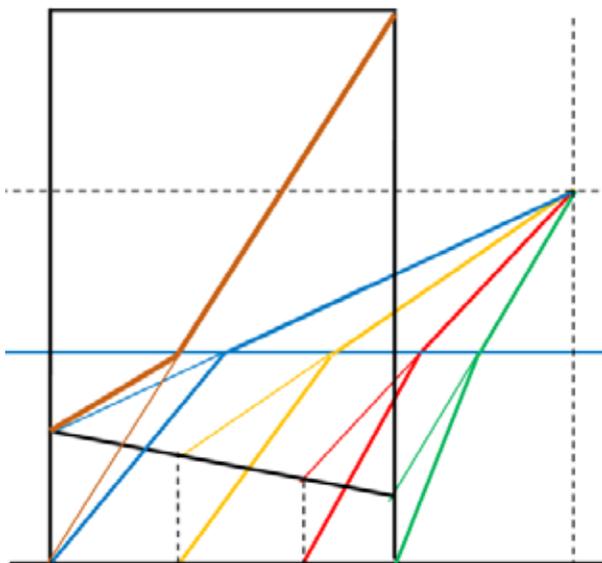
Скорости света в воздухе  $v_1$  и в воде  $v_2$  связаны отношением  $v_2 = 3/4 v_1$ . Графическое построение, соответствующее этому отношению, хорошо согласуется с реальным фотографическим изображением. Наблюдателю, находящемуся на линии луча, будет казаться, что световое пятно на дне аквариума находится выше, чем это имеет место в реальности (показано желтым цветом).



Ил. 3.2.2

На *ил. 3.2.2* построены преломленные изображения трех точек, лежащих на горизонтальной прямой так, как они представляются наблюдателю, находящемуся в точке  $S$ . Эти изображения принадлежат некоторой пологой кривой, которая на небольшом участке мало отличается от прямой.

Отмеченное свойство позволяет с достаточной точностью осуществлять построение горизонтальных преломленных изображений в перспективе, заменяя небольшие участки кривой прямыми.



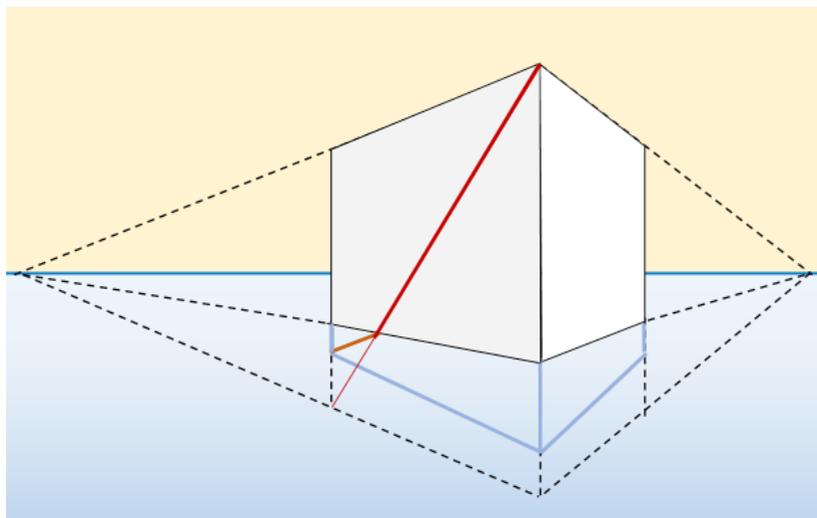
Ил. 3.2.3

На *ил. 3.2.3* показано построение преломленного изображения горизонтальной стороны прямоугольника, частично погруженного в воду. Как видно из построений, полученное преломленное изображение горизонтального отрезка очень близко к прямой. Изображения прямых, перпендикулярных поверхности воды, сокращаются по длине, но не преломляются и остаются перпендикулярными поверхности. Диагональ прямоугольника, показанная коричневым цветом, преломляется в точке пересечения с преломляющей поверхностью.

На *ил. 3.2.4* наглядно показано вышеизложенное. Преломленное изображение горизонтальной прямой, образованной пересечением плоскостей дна и боковой стенки бассейна, под водой представляет собой пологую кривую. Небольшие участки этой кривой очень незначительно отличаются от прямой.



Ил. 3.2.4



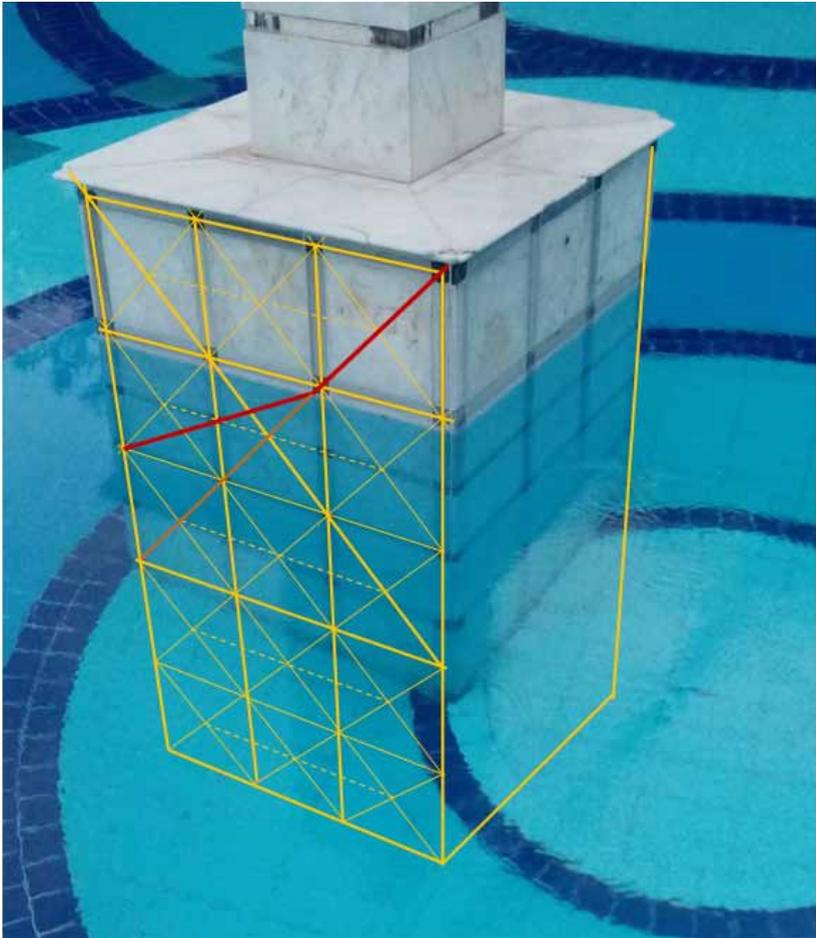
Ил. 3.2.5

На *ил. 3.2.5* дано перспективное изображение параллелепипеда, частично погруженного в воду. Пунктиром обозначено, каким было бы изображение при отсутствии воды. Вертикальные ребра сокращаются, но остаются вертикальными, наклонная диагональ преломляется, как показано на рисунке.

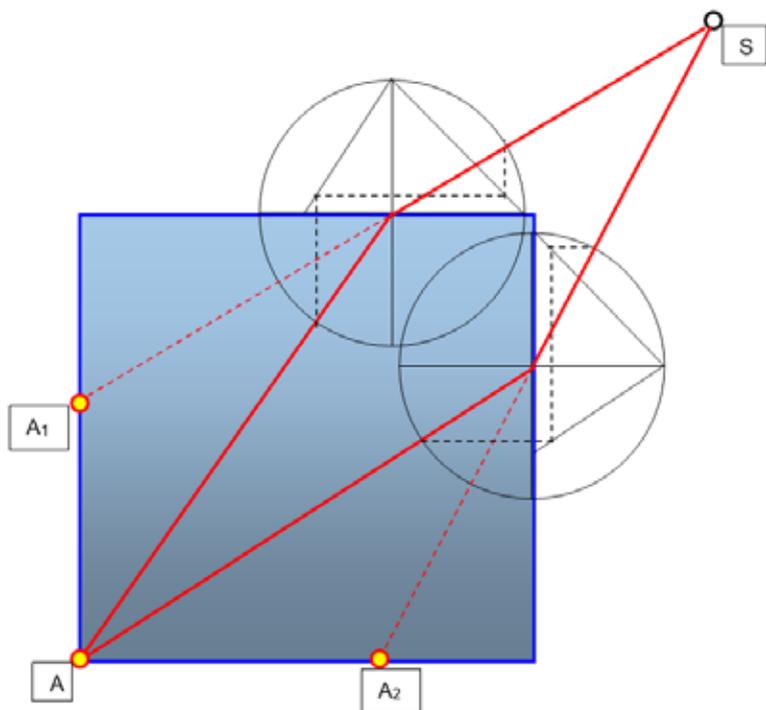
Изображение на *ил. 3.2.6* хорошо согласуется с теоретическими построениями (*ил. 3.2.2, 3.2.3, 3.2.5*).

Квадратная облицовочная плитка, видимая и на воздухе, и под водой, позволяет построить преломленное изображение диагонали квадрата (красная), а также перспективное изображение конструкции, каким оно было бы при отсутствии воды (желтое).

В рассмотренных выше примерах преломление осуществляется в одной плоскости и реальной точке соответствует единственное преломленное изображение. На практике часто встречаются случаи преломления в нескольких плоскостях. В этом случае одна точка может иметь множество преломленных изображений.



Ил. 3.2.6

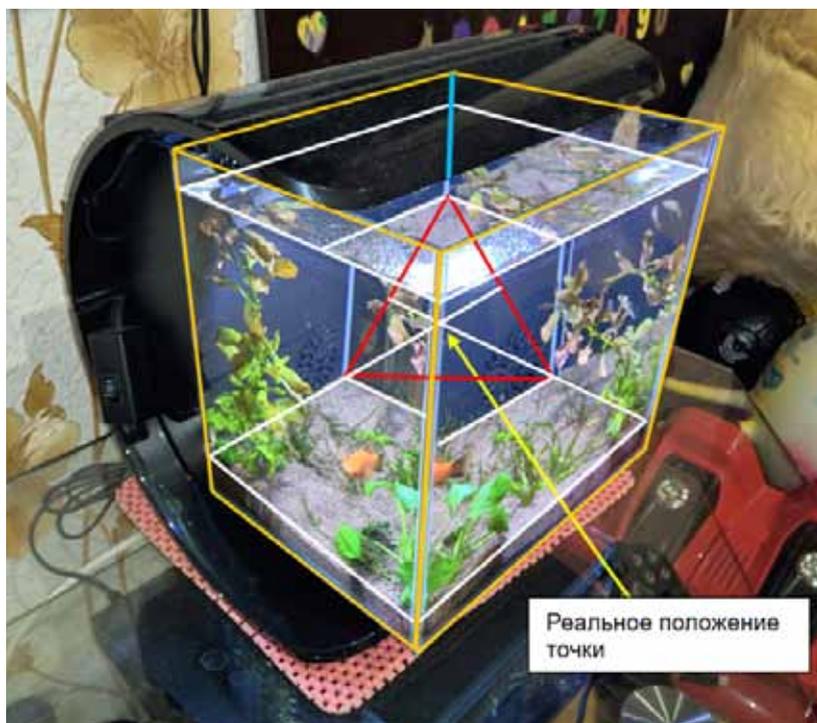


Ил. 3.2.7

На ил. 3.2.7 представлено построение преломления одновременно в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Наблюдатель, находящийся в точке  $S$ , будет видеть два преломленных изображения  $A_1$  и  $A_2$  одной и той же точки  $A$ .

Это свойство в сочетании с полным внутренним отражением (см. п. 3.3) часто используют для создания различных обманчивых и эффектных иллюзий. Например, многие цирковые шоу и фокусы построены на использовании именно этого физического явления.

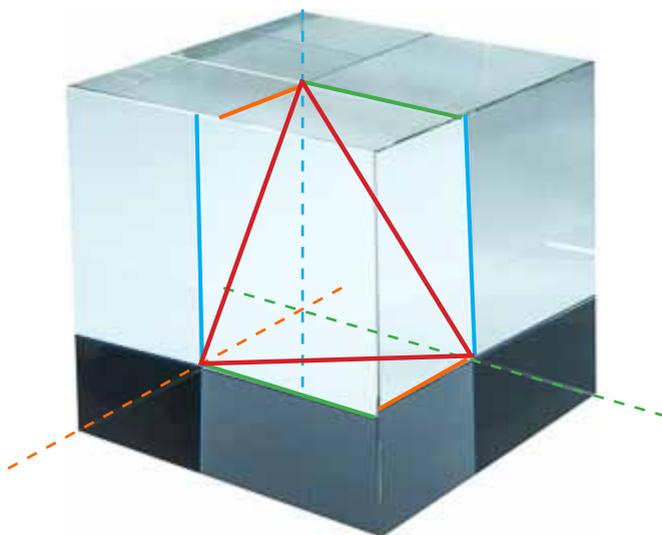
Для придания дополнительной глубины и загадочности интерьеру также применим этот прием. При оформлении различных экспозиций множественные преломления могут подчеркнуть и усилить эффект выставочного объекта.



Ил. 3.2.8

На *ил. 3.2.8* видны преломленные изображения в трех взаимно перпендикулярных плоскостях (поверхность воды и две боковые стенки аквариума). Вершины красного треугольника указывают на преломленные изображения одной и той же точки (пересечение дальнего ребра аквариума с его дном). Реальное положение этой точки найдено построением и помечено желтой стрелкой.

На фотографии видно, что прямые, перпендикулярные преломляющим плоскостям, не преломляются, а только сокращаются по длине.



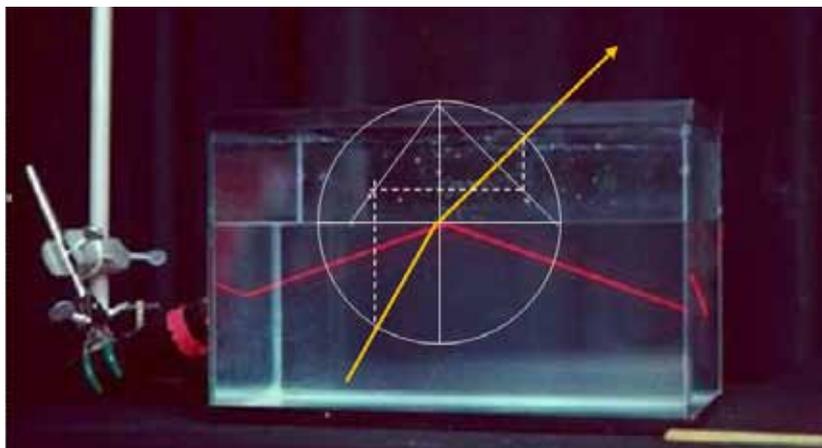
Ил. 3.2.9

На *ил. 3.2.9* представлен параллелепипед, выполненный из прозрачного материала. Вершины красного треугольника указывают на преломленные изображения одной и той же точки (пересечение дальнего ребра с плоскостью основания). Реальное положение этой точки находится на пересечении пунктирных линий.

### 3.3. Полное внутреннее отражение

В случае перехода света из более плотной оптической среды в менее плотную, например из воды в воздух, может возникать явление, известное как полное внутреннее отражение.

На *ил. 3.3.1* видно, что лазерный луч (красный), направленный из-под воды под очень острым углом к поверхности, не выходит в воздух, а полностью отражается от поверхности воды. Это явление носит название полного внутреннего отражения. Полным такое отражение называют потому, что оно происходит практически без потерь световой энергии. Желтым цветом показана построенная траектория светового луча, направленного к поверхности под менее острым углом и выходящего из воды в воздух.



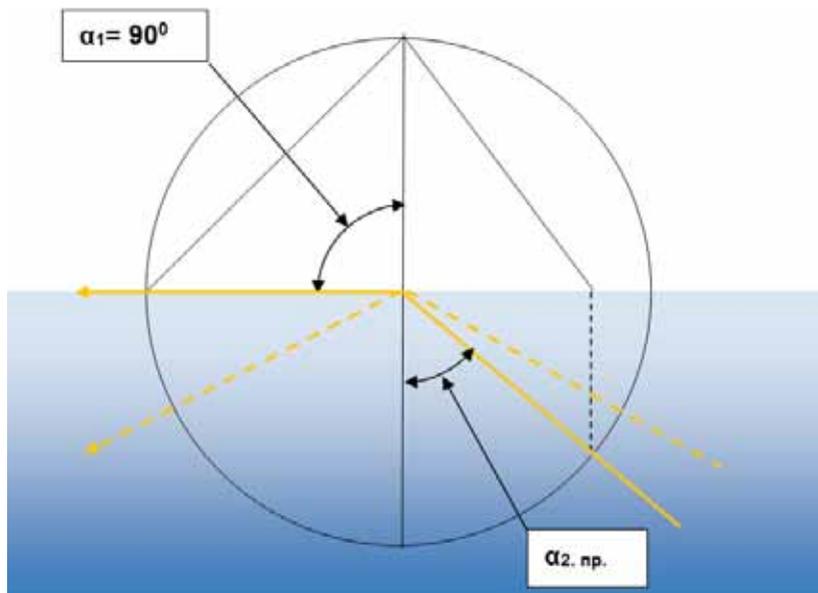
Ил. 3.3.1

На *ил. 3.3.2* представлена эффектная картина внутреннего отражения, возникающая при съемке из-под воды.



Ил. 3.3.2

Пояснить природу этого явления можно при помощи построения, представленного на *ил. 3.1.5*.



Ил. 3.3.3

Если угол  $\alpha_1 = 90^\circ$ , то, согласно закону преломления, угол  $\alpha_2$  будет иметь некоторое предельное значение  $\alpha_{2\text{пр}}$ .

Если  $\alpha_2$  будет больше этого предельного значения, то будет иметь место не преломление, а отражение (показано пунктиром) (см. *ил. 3.3.3*).

#### 3.4. Широкоугольная перспектива «рыбий глаз»

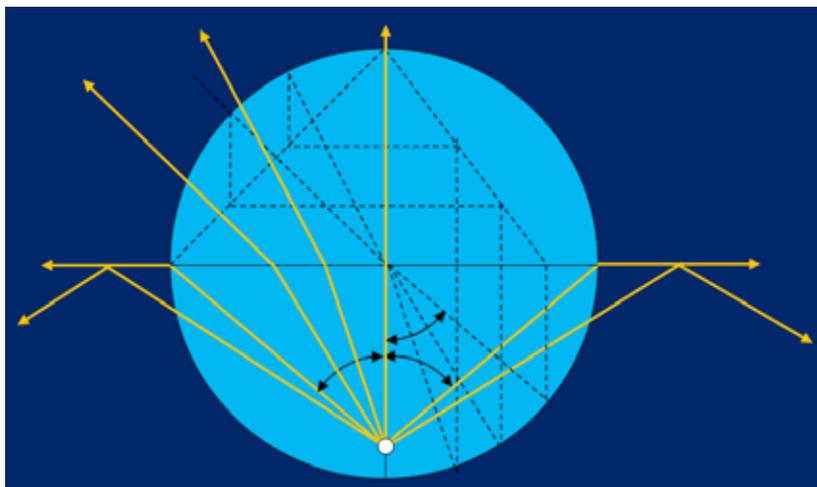
На *ил. 3.4.1* и *3.4.1а* представлены изображения, которые видит наблюдатель, находящийся под водой, при взгляде вверх. Окружность, ограничивающую эти картины, называют окном Снелла – по имени Виллеброрда Снелла ван Ройена, ученого, установившего закон преломления.



Ил. 3.4.1



Ил. 3.4.1а



Ил. 3.4.2

На *ил. 3.4.2* показана схема возникновения этого явления. Окружность представляет собой основание конуса, образованного лучами с предельными углами преломления (показаны стрелками). Как видно из приведенной схемы, изображение охватывает угол в  $180^\circ$ . Глубина, на которой находится наблюдатель, составляет примерно  $0,85$  радиуса окна Снелла.

Изображение, возникающее в окне Снелла, называют широкоугольной перспективой или перспективой «рыбий глаз».

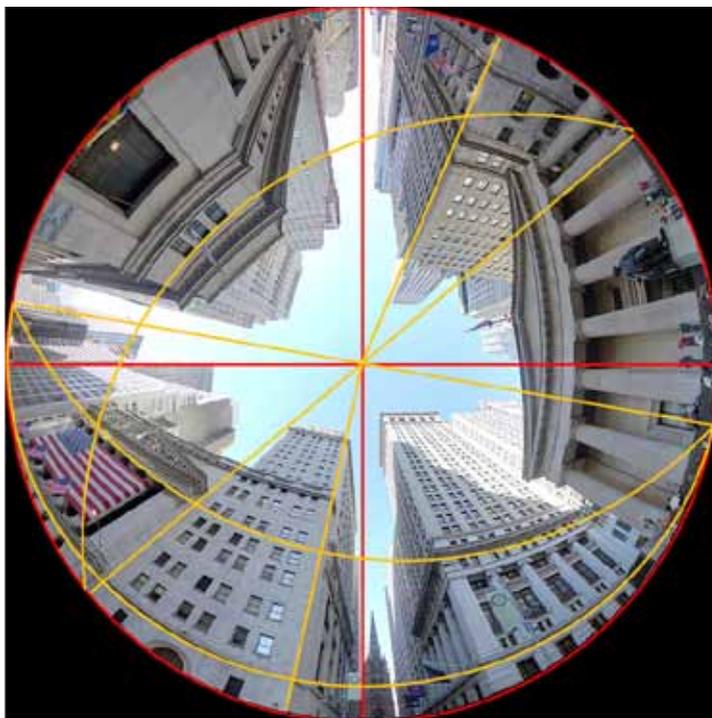
Название «рыбий глаз», или фишай (от англ. fish-eye), указывает на то, что подводные обитатели, в частности рыбы, видят всю верхнюю полусферу надводного мира в пределах конуса с углом при вершине чуть больше  $90^\circ$ . Впервые этот термин использовал в 1911 году американский физик Роберт Вуд.



Ил. 3.4.3

На *ил. 3.4.3* представлена фотография, сделанная из-под воды американским физиком Робертом Вудом в начале XX века. Эта фотография является первой известной фотографией такого вида.

Непосредственная съемка из-под воды позволяет делать широкоугольные снимки не очень высокого качества и только в вертикальном направлении. Современная широкоугольная оптика дает возможность получать высококачественные изображения типа «рыбий глаз» в любом направлении (*ил. 3.4.4, 3.4.5*).



Ил. 3.4.4

На *ил. 3.4.4* главная ось направлена строго вертикально. Прямые, параллельные главной оси или пересекающие главную ось, остаются прямыми. Прямые, перпендикулярные главной оси, изображаются дугами окружностей, проходящими через диаметрально противоположные точки. Таким образом, возникает очередная неевклидова геометрия, в которой все прямые пересекаются в одной точке, а параллельные – в двух.



Ил. 3.4.5

На *ил. 3.4.5* главная ось направлена не строго горизонтально, но под небольшим наклоном. Вследствие этого точка схода горизонтальных прямых не совпадает с главной точкой в центре окружности. Рельсы, примерно перпендикулярные главной оси, изображаются дугами окружностей, проходящих через диаметральные точки.

#### IV. ПРИРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОТРАЖЕНИЕМ, ПРЕЛОМЛЕНИЕМ И РАЗЛОЖЕНИЕМ СВЕТА

Рассмотренные выше законы поведения света позволяют объяснить и классифицировать многие световые явления, имеющие место в реальности.

##### Радуга

Наиболее эффектным природным явлением спектрального разложения, безусловно, является радуга, возникающая при преломлении и отражении света в каплях воды или мелких кристаллах льда. При реалистичном изображении пейзажа художнику следует знать, что геометрически радуга представляет собой окружность (или часть окружности). Солнце при этом находится за спиной зрителя, и прямая, проведенная через солнце и точку зрения, проходит через центр радужной окружности.

Изображения радуги можно встретить во многих художественных произведениях, например, «Пейзаж с радугой» (1630-е) Питера Пауля Рубенса, «Горный пейзаж с радугой» (1809) Каспара Давида Фридриха, «Пейзаж с радугой» (1649?) Тенирса Давида Младшего, «Вид на собор Солсбери из сада епископа» (1826) Джона Констебля, «Пейзаж с ветряной мельницей и радугой» (ок. 1800) Уильяма Тернера, «Радуга» (1875) Алексея Саврасова, в работах Константина Сомова, Архипа Куинджи, Николая Крымова и др.

На *ил. 4.1–4.5* представлены изображения дождевой радуги, полученные на равнине, в горах и с летательного аппарата.



Ил. 4.1



Ил. 4.2



Ил. 4.3



Ил. 4.4

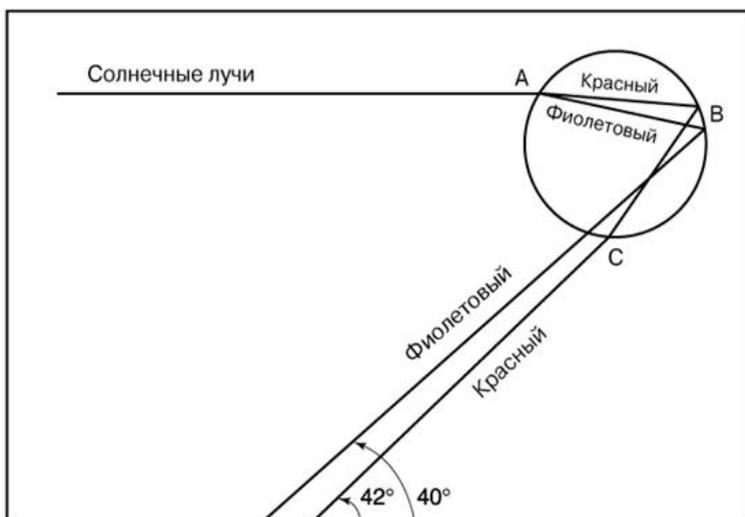


Ил. 4.5

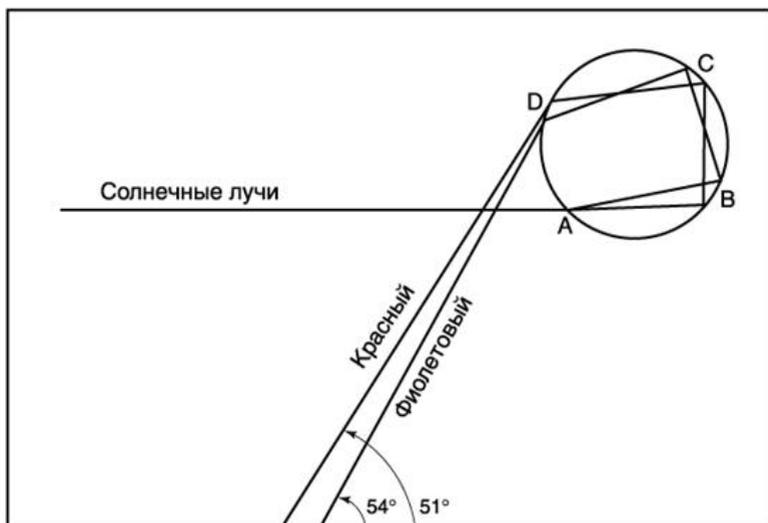
Как видно на фотографиях, зачастую радуга бывает двойной. Цвета во внутренней и внешней радугах расположены в обратном порядке. Возникновение и яркость двойной радуги зависит от взаимного расположения наблюдателя, солнца, дождевого фронта, а также от размеров и формы капель. У внутренней радуги внешним является красный цвет, у внешней – фиолетовый.

Внутренняя (основная) радуга возникает при однократном отражении света внутри водяной капли (ил. 4.6). Внешняя (вторичная) радуга возникает при двукратном внутреннем отражении (ил. 4.7).

Если капли воды имеют идеальную сферическую форму, то угловой радиус внутренней (основной) радуги составляет  $40^\circ$  для фиолетовой окружности и  $42^\circ$  – для красной. Угловой радиус внешней (вторичной) радуги равен  $51^\circ$  для красной и  $54^\circ$  для фиолетовой окружностей.



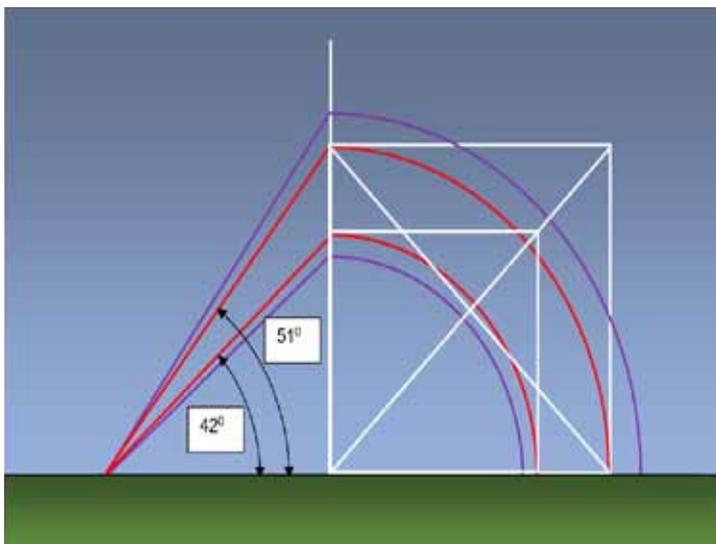
Ил. 4.6



Ил. 4.7

Отношения диаметров радужных окружностей равно отношению тангенсов их угловых радиусов (см. ил. 3.1.3). Тангенсы данных углов имеют следующие значения:  $\text{tg } 40^\circ \approx 0,84$ ,  $\text{tg } 42^\circ \approx 0,90$ ,  $\text{tg } 51^\circ \approx 0,90$ ,  $\text{tg } 54^\circ \approx 1,38$ .

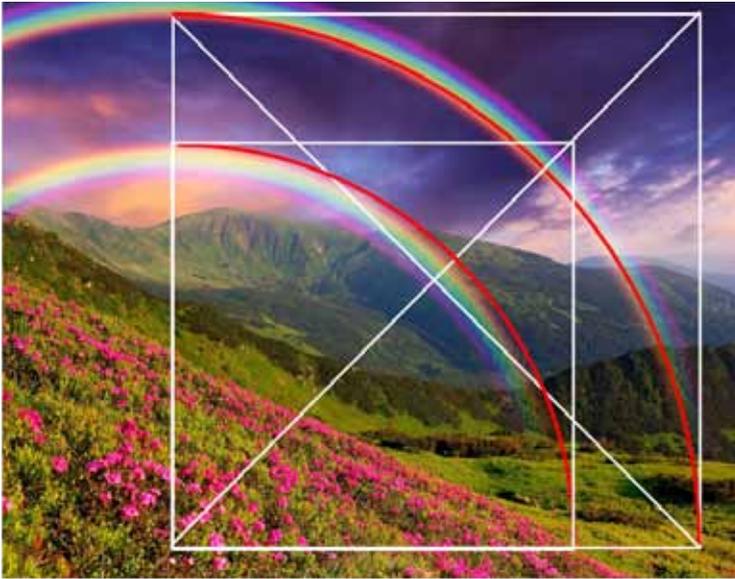
На ил. 4.8 представлена графическая модель вышеизложенного. Для упрощения чертежа промежуточные цвета не показаны. На радиусах красных окружностей построены квадраты и проведены диагонали.



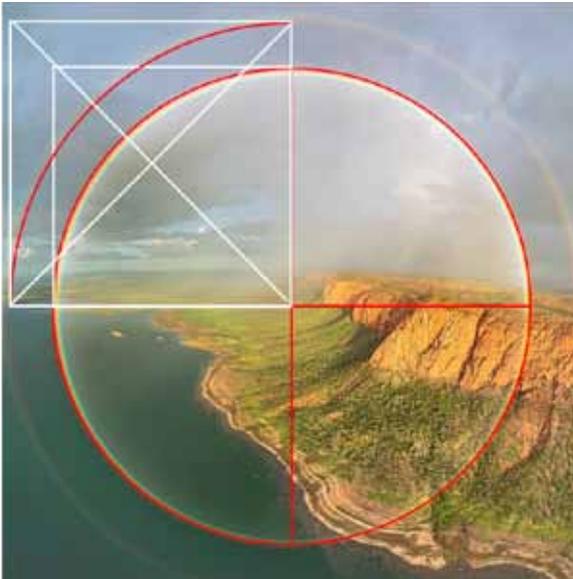
Ил. 4.8

Аналогичные построения, выполненные на ил. 4.9, показывают, что реальная картина соответствует теоретической модели, представленной на ил. 4.8, весьма приблизительно. Еще большее расхождение с теорией наблюдается на ил. 4.10, снятой с большой высоты.

Эти расхождения происходят оттого, что в реальности капли воды под воздействием различных факторов обладают идеально сферической формой далеко не всегда. Чаще всего они имеют вид эллипсоида, и в зависимости от их положения относительно наблюдателя углы отражения и преломления могут изменяться в довольно широких пределах.



Ил. 4.9



Ил. 4.10

Чаще всего в природе наблюдаются одинарные и двойные радуги. Но в ряде случаев при совпадении ряда уникальных условий могут возникать и множественные радуги.



Ил. 4.11. Тройная радуга



Ил. 4.12. Множественная радуга



Ил. 4.13. Отраженная радуга



Ил. 4.14. Лунная радуга над водопадом Виктория.  
Отличается от солнечной только значительно меньшей яркостью



Ил. 4.15. Двойная лунная радуга.  
В правой части снимка видно полярное сияние



Ил. 4.16. Туманная, или белая, радуга

Белая радуга образована мельчайшими каплями тумана и не имеет ярко выраженных цветовых градаций. На *ил. 4.16* видно, что тень от головы наблюдателя, ведущего съемку, находится в центре окружности на оси солнце – камера.



Ил. 4.17. Облачная радуга (глюрия)



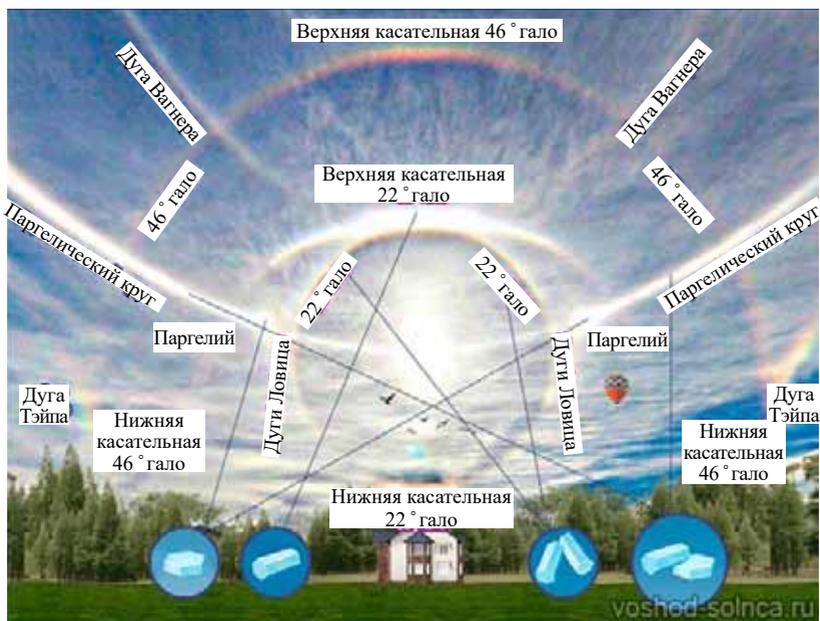
Ил. 4.18. Зимняя радуга

Зимняя радуга (*ил. 4.18*) является значительно более редким явлением, нежели радуга летняя. В отличие от летней дождевой радуги зимняя образуется не каплями воды, а взвешенными в воздухе мелкими ледяными кристаллами. Часто зимней радугой называют гало, возникающее вокруг солнца или луны, но это принципиально иное явление.

#### Гало и его разновидности

Гало, как и радуга, разлагает свет на спектральные составляющие, расположенные по окружности или по дуге окружности. По этой причине его часто путают с радугой. Однако в отличие от радуги, где источник света находится позади наблюдателя, гало образуется вокруг солнца, луны или иного светящегося объекта.

Это происходит вследствие отражения и преломления света во взвешенных в воздухе мелких кристаллах льда или каплях тумана. Угловой радиус гало от  $22^\circ$  до  $45^\circ$ . Гало может быть и двойным, и более сложным. Цвета от центра чаще располагаются от красного к фиолетовому, но возможен и обратный порядок.



Ил. 4.19. Примерная схема образования различных видов гало



Ил. 4.20. Простое круговое гало



Ил. 4.21. Сложное гало



Ил. 4.22. Эллиптическое гало



Ил. 4.23. Перевернутая, или зенитная, радуга



Ил. 4.24. Зенитная радуга как часть гало

Перевернутая, или зенитная, радуга – разновидность гало. Близкий к зениту радужный полукруг с вершиной около  $48^\circ$  над солнцем. Отличается яркими цветами: красный на нижней внешней части дуги и фиолетовый на верхней внутренней части. Возникает на перистых облаках.



Ил. 4.24а. Зенитная радуга как часть гало



Ил. 4.25. Горизонтальная радуга (небольшая часть дуги зенитной радуги большого диаметра). Возникает на перистых облаках



Ил. 4.26. Огненная радуга. Небольшой фрагмент зенитной радуги.  
Возникает на перистых облаках



Ил. 4.27. Паргелий (ложное солнце). Разновидность гало

## Солнечные столбы

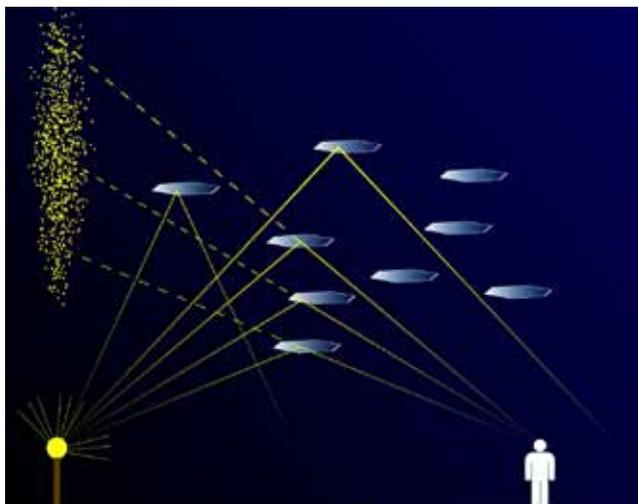
Солнечные столбы образуются на восходе или закате солнца вследствие отражения света от плоских ледяных кристаллов. Могут возникать от луны и иных источников света.



Ил. 4.28



Ил. 4.29



Ил. 4.30. Схема образования солнечного столба

### Венец



Ил. 4.31

Венец образуется вокруг светящегося объекта в облаках или в тумане – вокруг диска Солнца или Луны, реже – вокруг ярких звезд или земных источников света. Отличается от гало меньшим радиусом колец (не более  $5^\circ$ ). Наиболее эффектно этот феномен отражен в живописи Винсента Ван Гога (например, «Звездная ночь», 1889). На *ил. 4.31* представлен венец вокруг Луны.

## Восходы и закаты

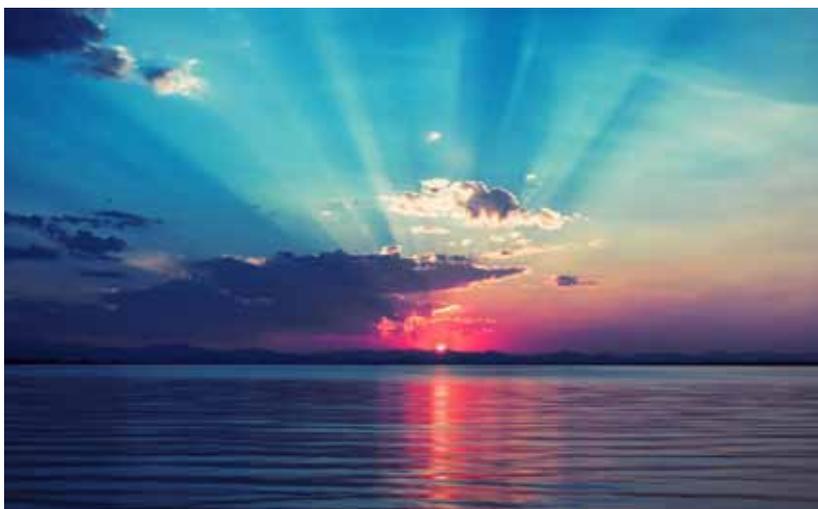
Цветовые явления, возникающие при восходах и закатах солнца, происходят вследствие поглощения, рассеивания и преломления света в земной атмосфере. Бесконечное разнообразие этих явлений зависит от множества факторов (запыленность атмосферы, облачность, влажность, время года и т. д.). Голубой цвет неба в дневное время объясняется преимущественным рассеиванием в атмосфере коротковолновой синей части спектра солнечного света. При закате и восходе слой воздуха, через который к наблюдателю приходит солнечный свет, увеличивается в десятки раз. Соответственно, увеличиваются и эффекты преломления, поглощения и рассеивания. Это позволяет увидеть в различных сочетаниях весь спектр солнечного света (ил. 4.32–4.36а).



Ил. 4.32



Ил. 4.33



Ил. 4.34



Ил. 4.35



Ил. 4.36



Ил. 4.36а



Ил. 4.37. Закат на Марсе



Ил. 4.38. Восход на Марсе

На *ил. 4.37–4.38* представлены заходы и восходы солнца, снятые на Марсе автоматической станцией. Атмосфера Марса примерно в сто раз менее плотная, нежели земная, и в ней не бывает облаков. Вследствие этого марсианские закаты и рассветы значительно уступают земным в цветовой гамме и разнообразии и в основном представлены холодной частью спектра.

### Миражи

Мираж – оптическое атмосферное явление, обусловленное отражением или преломлением света в слоях воздуха с различной температурой и, соответственно, с различной оптической плотностью. Чаще всего миражи возникают над гладкими однородными поверхностями (море или пустыня).

#### Дорожные и пустынные миражи

Эти миражи принято называть нижними. Они появляются над нагретыми солнцем поверхностями, над которыми образуется слой теплого воздуха. Холодный воздух, находящийся сверху, имеет бóльшую оптическую плотность, нежели теплый. Вследствие этого при переходе из более плотной оптической среды в менее плотную при очень острых углах падения возникает эффект полного внутреннего отражения (*см. п. 3.3.*). Отражение неба воспринимается как водная поверхность (*ил. 4.39–4.42.*).



Ил. 4.39



Ил. 4.40

Нижний мираж может быть как перевернутым, так и прямым, если отражающая поверхность не плоская или выпуклая, а вогнутая. Примеры таких миражей представлены на *ил. 4.41–4.42*. Теоретическое объяснение этого явления содержится в *п. 3.3*.

На *ил. 4.41–4.42* одновременно имеют место прямой и перевернутый миражи.

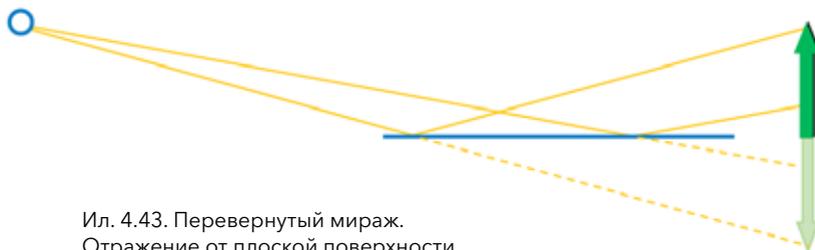


Ил. 4.41

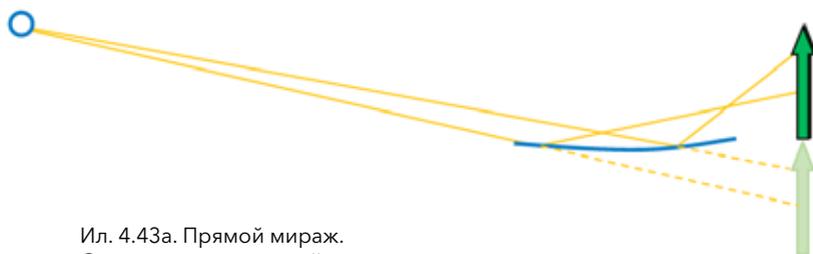


Ил. 4.42

На *ил. 4.43–4.43а* представлены принципиальные схемы возникновения перевернутых и прямых нижних миражей.



Ил. 4.43. Перевернутый мираж.  
Отражение от плоской поверхности



Ил. 4.43а. Прямой мираж.  
Отражение от вогнутой поверхности

### Верхние миражи (Фата Моргана)

В отличие от пустынных или дорожных нижних миражей верхние миражи возникают вследствие не отражения, а преломления света при переходе из теплого слоя воздуха в более оптически плотный холодный ( $n$ . 3.1) (ил. 4.44). Чаще всего это явление возникает над водной поверхностью.

На ил. 4.45–4.47 представлены примеры таких миражей.



Ил. 4.44



Ил. 4.45



Ил. 4.46



Ил. 4.47

В зависимости от кривизны преломляющий слой воздуха может работать как линза, что позволяет видеть объекты, находящиеся от наблюдателя на огромном расстоянии.

### Двойной верхний мираж

Иногда при совпадении ряда уникальных условий одновременно имеют место явления и отражения, и преломления. В этом случае возникают два изображения – прямое и перевернутое (ил. 4.48–4.50).



Ил. 4.48



Ил. 4.49



Ил. 4.50

Как видно на приведенных фотографиях, прямое и перевернутое изображения могут меняться местами.

## V. СВЕТОВЫЕ АТМОСФЕРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

### Северное (полярное) сияние

Свечение верхних слоев атмосферы, возникающее в основном в приполярных областях вследствие взаимодействия магнитосферы планеты с заряженными частицами солнечного ветра, принято называть полярным или северным сиянием.



Ил. 5.1

В атмосфере Земли в основном наблюдается свечение возбужденных атомов азота и кислорода. Преобладающими цветами в этом случае являются красный, зеленый и фиолетовый. Нижняя граница полярного сияния зачастую имеет четкий контур. Верхняя граница всегда размыта.

Полярное сияние представляет собой зрелище изумительной красоты, что можно видеть на *ил. 5.1–5.6*.



Ил. 5.2



Ил. 5.3



Ил.5.4

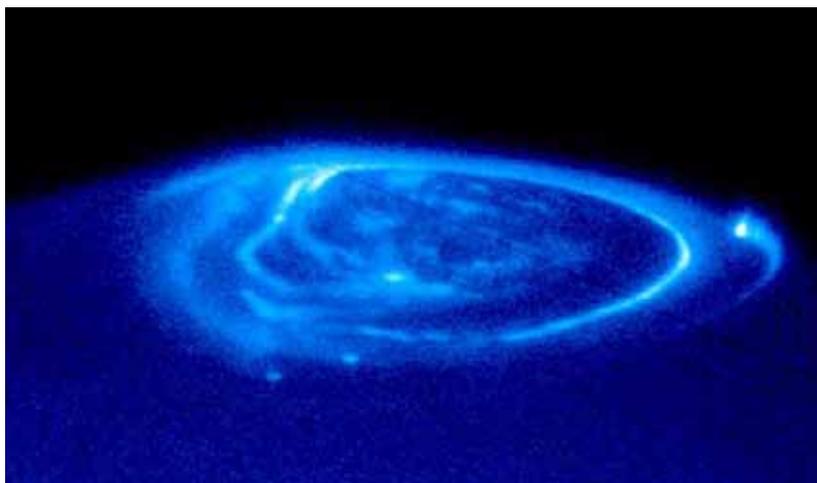


Ил. 5.5



Ил. 5.6

Полярные сияния наблюдаются и на других планетах Солнечной системы (например, на Юпитере, Сатурне).



Ил. 5.7. Полярное сияние на Юпитере



Ил. 5.8. Полярное сияние на Сатурне

### Огни святого Эльма

Свечение, возникающее на тонких окончаниях или углах самых различных объектов (шпильи, мачты, горные пики и даже человеческие пальцы) получило название «огни святого Эльма». Это разновидность коронного разряда, возникающего при большой напряженности электрического поля в атмосфере при грозах, ураганах, метелях и т. п.



Ил. 5.9. Огни святого Эльма



Ил. 5.10–5.11. Огни святого Эльма



Ил. 5.12. Огни святого Эльма

### Молнии

Грозное и красивое явление, представляющее собой мощный электрический разряд, сопровождаемый яркой вспышкой света.

### Грозовые молнии

Обычно их можно наблюдать в грозу, во время ураганов, при шторме и т. п. Чаще возникают нисходящие молнии (направленные к земле) и горизонтальные (между облаками). Восходящие молнии встречаются реже. Самая длинная молния была зафиксирована в 2020 году в США, на границе штатов Миссисипи и Техас. Ее протяженность составила 768 км.



Ил. 5.13–5.14. Нисходящая молния



Ил. 5.15. Горизонтальная молния



Ил. 5.16. Восходящая молния

При определенных условиях молнии могут возникать и при относительно тихой погоде (ил. 5.17–5.19).



Ил. 5.17



Ил. 5.18



Ил. 5.19

### Вулканические молнии

Вулканические молнии возникают при извержениях вулканов и могут быть любого направления.



Ил. 5.20



Ил. 5.21



Ил. 5.22

## Шаровые молнии

Природа шаровых молний до настоящего времени остается во многом загадочной, воспроизвести их искусственно пока не удастся.



Ил. 5.23



Ил. 5.24

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания кроме общеизвестных классических понятий и представлений геометрической теории изображений содержат некоторые новые идеи, теоремы, алгоритмы и построения, предложенные автором.

Далее представлен перечень этих новаций с краткими комментариями и рассмотрены некоторые возможности теоретического и практического приложения.

Часть I\*



*Геометрическая интерпретация пространств (множеств) отрицательной размерности.* Основная идея состоит в том, чтобы считать началом отсчета шкалы размерностей не нуль-мерное множество – точку, а пустое множество, имеющее размерность  $-1$ .

Таким образом, множества положительной и отрицательной размерности располагаются симметрично относительно пустого множества. Это позволяет представить все пять

---

\*[см.: 12]

существующих позиционных отношений геометрических множеств (тождество, принадлежность, включение, пересечение, непересечение) как частные случаи пересечения с положительным или отрицательным значением.

Кроме того, что вместо пяти отношений остается только одно, появляется возможность для многих задач, не имеющих решения в традиционном понимании, дать количественную характеристику множества этих нерешений с отрицательным знаком [12, с. 15–16].

*Символическая бескоординатная (множественная) система записи позиционных алгоритмов и отношений.* Эта система позволяет в единообразной символической форме с использованием стандартных алгебраических и множественных символов представлять любые позиционные отношения и алгоритмы, не привязываясь к какой-либо системе координат.

Над полученными символическими записями возможно осуществление формальных двойственных и иных геометрических преобразований. Результаты преобразований автоматически могут быть представлены в виде графических иллюстраций [12, с. 7–10].

*Конструктивная интерпретация и обоснование происхождения геометрического принципа двойственности.* Данная интерпретация не только позволяет наглядно понять, откуда вообще взялся принцип двойственности, но и дает возможность графическими методами осуществлять двойственные преобразования любой сложности и любой размерности.

В частности, можно представить фундаментальную теорему Паскаля–Паппа как частный случай линейного двойственного преобразования [12, с. 32–43].

*Универсальный единый алгоритм, позволяющий осуществлять построение точек и касательных для кривых второго порядка.* В отличие от многочисленных известных алгоритмов этот алгоритм подходит для всех видов кривых второго порядка (окружность, эллипс, парабола, гипербола) и позволяет одновременно находить касательную и точку касания [12, с. 74–75].

*Основные теоремы ортогональных и перспективных проекций.* В дополнение к основной теореме произвольной аксонометрии (теорема Польке – Шварца) автором сформулированы две основные теоремы для ортогональных и перспективных проекций. Эти теоремы позволяют осуществлять все необходимые построения непосредственно на картине, не прибегая к вспомогательным чертежам [12, с. 50–51, 72–73].

*Топологические характеристики плоских, трехмерных и многомерных структур.* В простой и доступной форме изложены основные понятия топологических закономерностей, присущих графическим структурам пространств любой размерности. Даны некоторые рекомендации по возможностям использования многомерных представлений в художественной практике [12, с. 89–96].

## Часть II

*Построение отражений в сферических выпуклых и вогнутых поверхностях.* Теоретически раздел не содержит ничего нового, но упрощает, систематизирует и иллюстрирует известные представления и построения (с. 57–65).

*Графический способ построения преломленного луча.* Закон преломления, открытый в XVII веке, позволяет аналитически рассчитать направление преломленного луча в той или иной преломляющей среде. Метод, предложенный автором, дает возможность решить задачу для любой преломляющей среды простым графическим способом, не требующим никаких вычислений (с. 66–86).

*Геометрическое обоснование явления полного внутреннего отражения и происхождения широкоугольной перспективы «рыбий глаз».* Рассмотрены некоторые построения и теоретические обоснования, не встречающиеся в имеющейся учебной литературе (с. 86–93).

*Классификация и геометрическая теория природных явлений, обусловленных отражениями и преломлениями света.* Предложена классификация и геометрическая теория для многих разнообразных природных оптических явлений.

Знание этих принципов позволит художнику иметь представление о разнообразии природных оптических явлений, грамотно изображать эти явления или, напротив, сознательно вносить искажения (с. 94–123).

*Световые атмосферные явления электромагнитного происхождения.* Дана примерная классификация и краткая физическая теория происхождения и разнообразия этих природных световых явлений (с. 124–136).

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М. : Физматлит, 2006.
2. *Михеенко А. В.* Геометрическая оптика. Хабаровск, 2018. 100 с.
3. *Можаров Г. А.* Геометрическая оптика : уч. пособ. М. ; СПб. : Лань, 2019.
4. *Элам К.* Геометрия дизайна. СПб. : Питер, 2011. 112 с.
5. *Климухин А. Г.* Начертательная геометрия. М. : Архитектура-С, 2007. 336 с.
6. *Макарова М. И.* Перспектива. М. : Академический проект, 2009. 477 с.
7. *Соболев Н. А.* Общая теория изображений. М. : Московский архитектурный институт, 2014. 672 с.
10. *Ворожищев Я. С.* Перспектива как частный случай трехмерной коллинеации и основная теорема перспективы / Институт имени И. Е. Репина // Научные труды. Вып. 34. СПб. : Ин-т им. И. Е. Репина, 2015. С. 88–98.
11. *Ворожищев Я. С.* Рельефная и сценическая перспектива. / Институт имени И. Е. Репина // Научные труды. Вып. 38. СПб. : Ин-т им. И. Е. Репина, 2016. С. 86–97.
12. *Ворожищев Я. С.* Теория и практика построения перспективных и иных проекционных изображений : метод. указания / Институт имени И. Е. Репина. Ч. I. СПб. : Ин-т им. И. Е. Репина, 2019.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
I. Построение теней .....	6
1.1. Тени в ортогональных проекциях.....	9
1.2. Тени в аксонометрии.....	16
1.3. Тени в перспективе .....	17
1.4. Тени на сложном рельефе.....	28
II. Построение отраженных изображений .....	29
2.1. Отражения в плоском зеркале .....	32
2.2. Плоскостные отражения в перспективе.....	36
2.3. Отражения в сферической поверхности .....	57
III. Построение преломленных изображений .....	66
3.1. Закон преломления.....	70
3.2. Преломленные изображения в перспективе .....	78
3.3. Полное внутреннее отражение .....	86
3.4. Широкоугольная перспектива «рыбий глаз».....	88
IV. Природные явления, обусловленные отражением, преломлением и разложением света.....	94
Радуга .....	94
Гало и его разновидности .....	105

Солнечные столбы .....	111
Венец.....	112
Восходы и закаты.....	113
Миражи.....	117
<b>V. Световые атмосферные явления</b>	
<b>электромагнитного происхождения.....</b>	<b>124</b>
Северное (полярное) сияние.....	124
Огни святого Эльма .....	128
Молнии .....	130
Заключение .....	137
Библиография.....	141

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Санкт-Петербургская академия художеств имени Ильи Репина

Я. С. ВОРОЖИЦЕВ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПОСТРОЕНИЯ  
ПЕРСПЕКТИВНЫХ И ИНЫХ  
ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методические указания

Часть II

Подписано в печать 13.12.2022. Тираж 60. Объем 6,3 уч.-изд. л. Заказ 4043.

Подготовлено и отпечатано в издательско-полиграфическом отделе

Санкт-Петербургской академии художеств имени Ильи Репина.

Санкт-Петербург, Университетская наб., 17